$A^{1/2}$, sign(A), polar(A) e $A\#B$: vecchie e nuove parentele

Bruno Iannazzo e Beatrice Meini

Giornate di Algebra Lineare Numerica e Applicazioni
Perugia, Febbraio 16–17, 2009

Università di Pisa

Outline

UNIVERSITÀ DI PISA

Definizione di $A^{1/2}$

Sia A matrice $n \times n$ senza autovalori reali nonpositivi. Si definisce $A^{1/2}$ l'unica soluzione di

$$X^2 - A = 0$$

con autovalori con parte reale positiva.

La definizione si estende se A non ha autovalori reali negativi, e l'autovalore nullo è semisemplice

Definizione di $\mathrm{sign}(A)$

Sia A matrice $n \times n$ senza autovalori immaginari puri, e sia

$$J = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix}$$

la forma normale di Jordan, dove $\sigma(J_-) \in \mathbb{C}_-$, $\sigma(J_+) \in \mathbb{C}_+$. Si definisce

$$\mathrm{sign}(A) = V \begin{bmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} V^{-1}$$

dove $p = \mathrm{dim} J_-$ e $q = \mathrm{dim} J_+$

Definizione di $\mathrm{polar}(A)$

Sia A matrice $n \times n$ non singolare. Il fattore polare unitario di A, $\mathrm{polar}(A)$, è l'unica matrice U tale che

$$A = UH, \quad U^*U = I,$$

dove H è hermitiana definita positiva.

(Una) definizione di $A\#B$

Siano A e B hermitiane definite positive. La media geometrica tra A e B è

$$A\#B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

Legami con $A^{1/2}$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\mathrm{sign}(A) = A(A^2)^{-1/2}$$
$$\mathrm{polar}(A) = A(A^*A)^{-1/2}$$
$$A\#B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

Legami con $\mathrm{sign}(A)$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{polar}(A) \\ (\mathrm{polar}(A))^* & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & A\#B \\ (A\#B)^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomi quadratici palindromici

Date P e Q matrici $n \times n$, con $\det Q \neq 0$, sia

$$\varphi(z) = Pz^2 + Qz + P$$

Polinomi quadratici palindromici

Date P e Q matrici $n \times n$, con $\det Q \neq 0$, sia

$$\varphi(z) = Pz^2 + Qz + P$$

Opportune scelte di P e Q permettono di caratterizzare $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$ mediante:

1. limite di una successione a convergenza quadratica
2. inversione del polinomio di Laurent $\mathcal{L}(z) = Pz + Q + Pz^{-1}$
3. rappresentazione integrale

Proprietà di $\varphi(z)$

Sia $M = Q^{-1}P$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. La matrice $(I - 4M^2)$ ammette una radice quadrata principale
2. Gli autovalori reali di M appartengono all'intervallo $[-1/2, 1/2]$, e gli eventuali autovalori di modulo $1/2$ sono semisemplici
3. L'equazione matriciale $PX^2 + QX + P = 0$ ha un'unica soluzione con autovalori appartenenti al disco unitario chiuso, e la cui espressione è

$$X_* = -2M(I + (I - 4M^2)^{1/2})^{-1}$$

Proprietà di $\varphi(z)$ – cont.

Sia $M = Q^{-1}P$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Gli autovalori reali di M appartengono all'intervallo $(-1/2, 1/2)$
2. Vale la fattorizzazione canonica
$$\mathcal{L}(z) = Qz^{-1} + P + Qz = (I - zQX_*Q^{-1})(Q + PX_*)(I - z^{-1}X_*)$$
3. $\mathcal{L}(z)$ è invertibile nell'anello $\{R < |z| < 1/R\}$, dove $R = \rho(X_*) < 1$

Proprietà di $\mathcal{L}(z)$

Sia

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{L}(z)^{-1} = H_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} H_i(z^i + z^{-i})$$

Vale

$$H_0 = (I - 4M^2)^{-1/2} Q^{-1}$$

Scelte speciali di P e Q caratterizzano H_0

Polinomi di Laurent e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Sia

$$\mathcal{L}(z) = \frac{1}{4}(S-T)z^{-1} + \frac{1}{2}(S+T) + \frac{1}{4}(S-T)z$$

Polinomi di Laurent e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Sia

$$\mathcal{L}(z) = \frac{1}{4}(S-T)z^{-1} + \frac{1}{2}(S+T) + \frac{1}{4}(S-T)z$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. Se A non ha autovalori reali nonpositivi, $S = I$ e $T = A^{-1}$, allora $H_0 = A^{1/2}$.

Polinomi di Laurent e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Sia

$$\mathcal{L}(z) = \frac{1}{4}(S - T)z^{-1} + \frac{1}{2}(S + T) + \frac{1}{4}(S - T)z$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. Se A non ha autovalori reali nonpositivi, $S = I$ e $T = A^{-1}$, allora $H_0 = A^{1/2}$.
2. Se A non ha autovalori immaginari, $S = A^{-1}$ e $T = A$, allora $H_0 = \mathrm{sign}(A)$.

Polinomi di Laurent e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Sia
$$\mathcal{L}(z) = \frac{1}{4}(S-T)z^{-1} + \frac{1}{2}(S+T) + \frac{1}{4}(S-T)z$$
Valgono le seguenti proprietà:

1. Se A non ha autovalori reali nonpositivi, $S = I$ e $T = A^{-1}$, allora $H_0 = A^{1/2}$.
2. Se A non ha autovalori immaginari, $S = A^{-1}$ e $T = A$, allora $H_0 = \mathrm{sign}(A)$.
3. Se A è nonsingolare, $S = A^{-1}$, $T = A^*$, allora $H_0 = \mathrm{polar}(A)$.

Università di Pisa

Polinomi di Laurent e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Sia

$$\mathcal{L}(z) = \frac{1}{4}(S-T)z^{-1} + \frac{1}{2}(S+T) + \frac{1}{4}(S-T)z$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. Se A non ha autovalori reali nonpositivi, $S = I$ e $T = A^{-1}$, allora $H_0 = A^{1/2}$.
2. Se A non ha autovalori immaginari, $S = A^{-1}$ e $T = A$, allora $H_0 = \mathrm{sign}(A)$.
3. Se A è nonsingolare, $S = A^{-1}$, $T = A^*$, allora $H_0 = \mathrm{polar}(A)$.
4. Se A e B sono definite positive, $S = A^{-1}$ e $T = B^{-1}$, allora $H_0 = A\#B$.

Università di Pisa

Riduzione ciclica palindromica (PCR)

PCR genera le successioni

$$\begin{cases} P_0 = P, \quad Q_0 = Q, \\ P_{k+1} = -P_k Q_k^{-1} P_k, \\ Q_{k+1} = Q_k - 2P_k Q_k^{-1} P_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Riduzione ciclica palindromica (PCR)

PCR genera le successioni

$$\begin{cases} P_0 = P, \quad Q_0 = Q, \\ P_{k+1} = -P_k Q_k^{-1} P_k, \\ Q_{k+1} = Q_k - 2P_k Q_k^{-1} P_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ponendo $X_k = Q_k$ e $H_k = 2P_{k+1}$, PCR diventa

$$\begin{cases} X_0 = Q, \quad H_0 = -2PQ^{-1}P \\ X_{k+1} = X_k + H_k, \\ H_{k+1} = -\frac{1}{2}(H_k X_{k+1}^{-1} H_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Conseguenza: PCR è il metodo di Newton per calcolare $(I - 4M^2)^{1/2}$, con $M = Q^{-1}P$.

Università di Pisa

PCR: convergenza

Valgono le seguenti proprietà:

1. PCR è ben definita e convergente se e solo se gli autovalori reali di M appartengono all'intervallo $[-1/2, 1/2]$ e gli autovalori di modulo $1/2$ sono semisemplici

PCR: convergenza

Valgono le seguenti proprietà:

1. PCR è ben definita e convergente se e solo se gli autovalori reali di M appartengono all'intervallo $[-1/2, 1/2]$ e gli autovalori di modulo $1/2$ sono semisemplici
2. Nell'ipotesi di convergenza vale

$$P_k \to 0, \quad Q_k \to Q(1-4M^2)^{1/2} = H_0^{-1}$$

PCR: convergenza

Valgono le seguenti proprietà:

1. PCR è ben definita e convergente se e solo se gli autovalori reali di M appartengono all'intervallo $[-1/2, 1/2]$ e gli autovalori di modulo $1/2$ sono semisemplici
2. Nell'ipotesi di convergenza vale

$$P_k \to 0, \quad Q_k \to Q(1-4M^2)^{1/2} = H_0^{-1}$$

3. PCR converge quadraticamente se gli autovalori reali di M appartengono all'intervallo $(-1/2, 1/2)$; linearmente se M ha almeno un autovalore semisemplice di modulo $1/2$

PCR e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Siano $P = \frac{1}{4}(B - A)$ e $Q = \frac{1}{2}(B + A)$. Allora:

1. Se A non ha autovalori reali nonpositivi e $B = I$, allora $Q_k \to A^{1/2}$; la convergenza è quadratica se $\det A \neq 0$, è lineare se $\det A = 0$ e gli autovalori nulli sono semisemplici

PCR e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Siano $P = \frac{1}{4}(B - A)$ e $Q = \frac{1}{2}(B + A)$. Allora:

1. Se A non ha autovalori reali nonpositivi e $B = I$, allora $Q_k \to A^{1/2}$; la convergenza è quadratica se $\det A \neq 0$, è lineare se $\det A = 0$ e gli autovalori nulli sono semisemplici
2. Se A non ha autovalori immaginari e $B = A^{-1}$, allora $Q_k \to \mathrm{sign}(A)$ quadraticamente

PCR e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Siano $P = \frac{1}{4}(B - A)$ e $Q = \frac{1}{2}(B + A)$. Allora:

1. Se A non ha autovalori reali nonpositivi e $B = I$, allora $Q_k \to A^{1/2}$; la convergenza è quadratica se $\det A \neq 0$, è lineare se $\det A = 0$ e gli autovalori nulli sono semisemplici
2. Se A non ha autovalori immaginari e $B = A^{-1}$, allora $Q_k \to \mathrm{sign}(A)$ quadraticamente
3. Se A è nonsingolare, e se $B = A^{-*}$ allora $Q_k \to \mathrm{polar}(A)$ quadraticamente

PCR e $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$

Siano $P = \frac{1}{4}(B - A)$ e $Q = \frac{1}{2}(B + A)$. Allora:

1. Se A non ha autovalori reali nonpositivi e $B = I$, allora $Q_k \to A^{1/2}$; la convergenza è quadratica se $\det A \neq 0$, è lineare se $\det A = 0$ e gli autovalori nulli sono semisemplici
2. Se A non ha autovalori immaginari e $B = A^{-1}$, allora $Q_k \to \mathrm{sign}(A)$ quadraticamente
3. Se A è nonsingolare, e se $B = A^{-*}$ allora $Q_k \to \mathrm{polar}(A)$ quadraticamente
4. Se A e B sono definite positive, allora $Q_k \to A\#B$ quadraticamente;

PCR "compatta e scalata"

Date A e B, scelte in "modo opportuno",

$$\begin{cases} \gamma_k = \left| \dfrac{\det(X_k)^2}{\det(A)\det(B)} \right|^{-1/(2n)}, \\ X_{-1} = A, \quad X_0 = \dfrac{1}{2\gamma_{-1}}(B + \gamma_{-1}^2 A), \\ X_{k+2} = \dfrac{\gamma_{k+2}}{2}(X_{k+1} + 2X_k/\gamma_{k+1} - X_k X_{k+1}^{-1} X_k), \qquad k = -1, 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

La successione $\{X_k\}$ converge alla corrispondente funzione di A e B.

Rappresentazione integrale

Se

$$\mathcal{L}(z) = \frac{1}{4}(S - T)z^{-1} + \frac{1}{2}(S + T) + \frac{1}{4}(S - T)z$$

allora

$$H_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{L}(e^{i\theta})^{-1} d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (S + T + \cos\theta(S - T))^{-1}\, d\theta$$

Opportune scelte di S e T forniscono nuove rappresentazioni integrali

Rappresentazione integrale – cont

Valgono le seguenti rappresentazioni:

$$A^{1/2} = \frac{1}{\pi} A \int_0^{2\pi} (I + A + \cos\theta (A - I))^{-1} \, d\theta$$

$$\mathrm{sign}(A) = \frac{1}{\pi} A \int_0^{2\pi} \left(I + A^2 + \cos\theta (I - A^2)\right)^{-1} d\theta$$

$$\mathrm{polar}(A) = \frac{1}{\pi} A \int_0^{2\pi} (I + A^*A + \cos\theta (I - A^*A))^{-1} \, d\theta$$

$$A\#B = \frac{1}{\pi} B \left(\int_0^{2\pi} (A + B + \cos\theta (B - A))^{-1} \, d\theta \right) A.$$

Conclusioni

- Nuova caratterizzazione teorica e nuovi legami tra $A^{1/2}$, $\mathrm{sign}(A)$, $\mathrm{polar}(A)$, $A\#B$
- Nuovi algoritmi? Si e no, vi risponderà Bruno Iannazzo al prossimo talk