

Risultati e prospettive sulle matrici con struttura di rango

Luca Gemignani

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
gemignan@dm.unipi.it

GALN 2009



UNIVERSITÀ DI PISA

Gli Attori sulla Scena

- ▶ la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- ▶ l'equazione “fondamentale”

$$A^H q_m(A) - p_\ell(A) = Q_B(A),$$

dove $q_m(z)$ e $p_\ell(z)$ sono polinomi rispettivamente di grado al più m e ℓ con $q_m(A)$ invertibile e $Q_B(A)$ una matrice di rango al più κ

- ▶ gli algoritmi esistenti per l'approssimazione degli autovalori e/o autovettori di A



I Fondamenti della Trama

1. quali vantaggi computazionali nel caso m , ℓ e κ costanti (indipendenti da n)?
2. applicazioni alle “polynomial computations”
 - ▶ matrici companion e “polynomial root-finding”
 - ▶ matrici a freccia e “polynomial algebra by values”
 - ▶ matrici dpss e “rational Gaussian quadrature formulae”
 - ▶ varianti a blocchi



La Narrazione I: Teoria

The eminence of the QR algorithm stems from the fact that it is a genuinely new contribution to the field of numerical analysis and not just a refinement of ideas given by Newton, Gauss, Hadamard, or Schur (B. Parlett)

Teorema

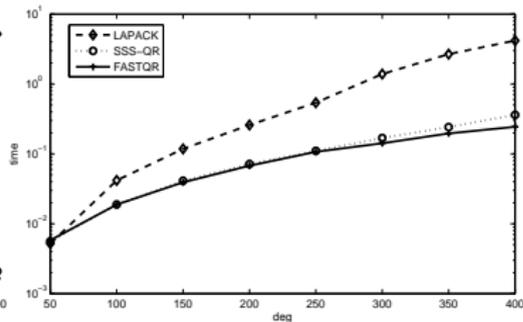
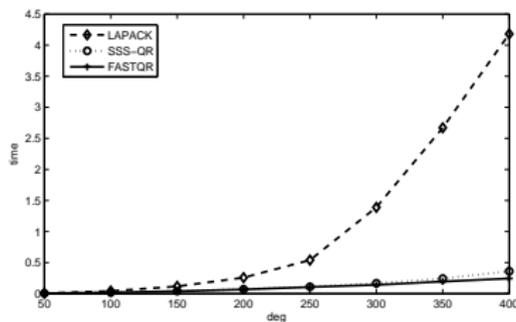
L'algoritmo QR implicito applicato ad una matrice companion richiede $O(n)$ ops per iterazione.

- ▶ (Bini & Boito & Eidelman & G. & Gohberg, LAA sottomesso 2008)
- ▶ (Van Barel & Vandebril & Van Dooren, T.R. 2008)
- ▶ (Chandrasekaran & Gu & Xia & Zhu , Oper. Theory Adv. Appl. 2008)



La Narrazione I: Pratica

- ▶ Tempi di esecuzione per $P(x) = x^n - 1$.
- ▶ errore assoluto $\simeq 10^{-15}$



La Narrazione II: Teoria

The interplay between Toeplitz matrices and polynomial computations is never ending source of inspiration that never stops grabbing my attention (Anonimo Pisano)

- ▶ algoritmo euclideo esteso

$$t(z) = \frac{c(z)}{a(z)a(1/z)} = s(z) + \frac{p(1/z)}{a(1/z)} + \frac{p(z)}{a(z)}$$

- ▶ $T_n = T_n(s) + T_a^{-1} \cdot T_p + T_p^T \cdot T_a^{-T}$

Teorema

La matrice T_n si tridiagonalizza con $O(n^2)$ ops

(Frederix & G. & Van Barel , ETNA in corso di stampa)



La Narrazione II: Pratica

► Esempio 1

$$T_n = (0.5^{|i-j|})_{i,j=1}^n, \quad t(z) = \frac{0.75}{(1-0.5z)(1-0.5z^{-1})}$$

► Esempio 2

$$t(z) = \frac{z^{-2} - 3.5z^{-1} + 1.5 - 3.5z + z^2}{a(z)a(z^{-1})}, \quad a(z) = (1-0.1z)(1-0.2z)$$

n	Esempio 1	Esempio 2
10	1.0×10^{-15}	6.4×10^{-16}
50	2.0×10^{-15}	1.2×10^{-15}
100	4.1×10^{-15}	1.7×10^{-15}
500	1.4×10^{-14}	3.5×10^{-15}
1000	2.3×10^{-14}	5.6×10^{-15}



La Narrazione III: Teoria

Much of our work can be thought of as lying in the interface between classical analysis and linear algebra (W. Gautschi commentando il lavoro di Gene Golub)

$$\int_a^b \omega(t)f(t)dt \simeq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\xi_k), \quad \lambda_k = \left[\sum_{j=0}^{n-1} (\phi_j(\xi_k))^2 \right]^{-1}$$

$$\int_a^b \omega(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\xi_k) \text{ se } f(t) = \frac{\rho(t)}{\prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)^2}$$

Teorema

I nodi ξ_k e i pesi λ_k si ottengono risolvendo un problema generalizzato agli autovalori $T_1\phi = \xi T_2\phi$ con T_1 e T_2 tridiagonali e $T_1 T_2^T = T_2 T_1^T$.

(Fasino & G. , NUMA 2007)



UNIVERSITÀ DI PISA

La Narrazione III: Pratica

- ▶ (Trasformata di Cayley) Determinare $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\beta \in \mathbb{C}$ tali che $A = \alpha T_1 + \beta T_2$ e $B = \alpha T_1 - \beta T_2$ verifichino

$$A \cdot A^H = B \cdot B^H, \det A \neq 0, \det B \neq 0.$$

- ▶ Da $A = R_A \cdot Q_A$, $B = R_B \cdot Q_B$, segue che $R_A = R_B$ e quindi

$$Q_A \mathbf{x} = \eta Q_B \mathbf{x} \Rightarrow Q_B^H Q_A \mathbf{x} = \eta \mathbf{x}$$

Proprietà strutturali delle matrici unitarie (Bini, G., Eidelman, Gohberg, Math. Comp. 2008)



I Nuovi Programmi I

- ▶ Necessità dell'equazione fondamentale

- ▶ $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definita positiva, A^\dagger definita da
 $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_B = \langle \mathbf{x}, A^\dagger \mathbf{y} \rangle_B, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, (\Rightarrow A^\dagger = B^{-1}A^H B)$

$$A^\dagger q_m(A) - p_\ell(A) = Q_B(A)$$

- ▶ se $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non definita positiva, classi più ampie, algoritmi “fast” ma potenziale instabilità (G. & Uhlig. , SISC sottomesso)
- ▶ A Hessenberg, $K = [\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \dots, A^{n-1}\mathbf{v}]$, $K = Q \cdot R$
 $B = Q^H A Q$ Hessenberg

A prize of \$ 500 has been offered by Gene Golub for the construction of a 3-term CG like descent method for non-symmetric real matrices or a proof that there can be no such method (Householder VIII)



I Nuovi Programmi I

- ▶ Faber e Manteuffel incassano il premio nel 1984

Per s ragionevolmente piccolo, comunque scelto \mathbf{v} le colonne di Q soddisfano una ricorrenza a $s + 2$ termini se e solo se

$$A^\dagger = p_s(A)$$

- ▶ Faber Liesen e Tichý SINUM 2008

Per s ragionevolmente piccolo, se A è Hessenberg a banda di ampiezza $s + 2$ e comunque scelto \mathbf{v} B è ancora Hessenberg a banda di ampiezza $s + 2$ allora

$$A^\dagger = p_s(A)$$

- ▶ Invarianza della struttura di rango nel metodo QR implica la relazione fondamentale?



I Nuovi Programmi II

- ▶ Linearizzazione di polinomi di matrici (con simmetrie)

- ▶ matrici companion a blocchi

- ▶ $P(\lambda) = \sum_{j=0}^3 \ell_j(\lambda)P_j$,

$$\lambda C_1 - C_0 = \begin{bmatrix} (\lambda - z_0)I & 0 & 0 & 0 & -P_0 \\ 0 & (\lambda - z_1)I & 0 & 0 & -P_1 \\ 0 & 0 & (\lambda - z_2)I & 0 & -P_2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - z_3)I & -P_3 \\ w_0 I & w_1 I & w_2 I & w_3 I & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Simmetrie sui coefficienti: caso simmetrico e pseudo-simmetrico $P_i = P_i^T$, $P_i = (-1)^i P_i^T$ (meccanica delle vibrazioni) e il caso palindromico $P_i = P_{n-i}^T$ (teoria dei controlli)

- ▶ Varianti “fast” del metodo QZ



I Nuovi Programmi III

- ▶ Una classe di problemi di programmazione quadratica convessa di grandi dimensioni (Mangasarian, Data mining via support vector machines, 2003)

$$\begin{aligned} \min f(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T Q \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{e} \\ \text{sub. to } \mathbf{y}^T \boldsymbol{\alpha} &= 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

$Q = S + \Gamma$, S diagonale semidefinita positiva e
 $\Gamma = (\gamma_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\gamma_{i,j} = y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, $1 \leq i, j \leq n$, con \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j vettori m -dimensionali e $m \ll \ll n$

- ▶ $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$
 - ▶ $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Exp}(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2}{2\sigma})$
- ▶ Γ ha struttura di rango approssimata. **Come descriverla?**



I Nuovi Programmi III

- ▶ Risoluzione del problema \Rightarrow sistemi KKT della forma

$$\begin{bmatrix} \widehat{S} + \widehat{\Gamma} & -B^T \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

con \widehat{S} diagonale e $\widehat{\Gamma}$ con struttura di rango

- ▶ Sfruttare la struttura nella risoluzione iterativa?
- ▶ Le proprietà di rango e spettrali del blocco in posizione (1,1) possono essere utilizzate per la sintesi di metodi efficienti di risoluzione? (vedi Golub, Greif, On solving block-structured indefinite linear systems, SISC. 24 (2003)).



*Drawing conclusions is easy: much work has been done,
but still much remains to be done*

GRAZIE



UNIVERSITÀ DI PISA