PREMIO DANTI

11 Aprile 2025 – IX Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

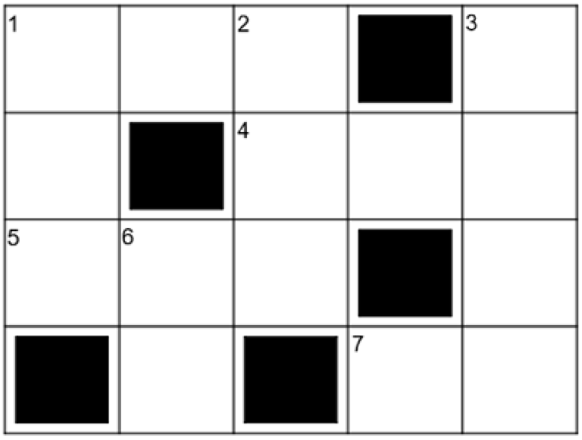
Università degli studi di Perugia

1. La gara consiste nella risoluzione in 120 minuti di quattro quesiti assegnati del valore di 10 punti ciascuno.
2. La soluzione di ciascun quesito (anche del crucinumero) richiede una dettagliata **argomentazione** o **dimostrazione**.
3. È consentito l'utilizzo di qualsiasi strumento manuale (righello, compasso, goniometro, …) ma è **assolutamente vietata, pena l'esclusione, l'utilizzo di calcolatrici, telefoni cellulari, computer o tablet e la comunicazione in qualsiasi forma con esterni alla squadra**.
4. Durante i primi 30 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
5. I componenti della squadra non possono lasciare la postazione di gara prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 90 minuti dall'inizio.
6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in **modo ordinato e leggibile** esclusivamente sui fogli consegnati dalla commissione. A pena di esclusione, l'elaborato NON dovrà contenere segni che lo rendano riconducibile alla squadra o alla scuola. Il nome del capitano e della scuola dovranno essere scritti nel foglio appositamente predisposto che verrà restituito in busta chiusa. Quest'ultima, insieme all'elaborato, sarà a sua volta inserita in una busta che verrà sigillata e consegnata al commissario.
7. Per quanto non indicato si fa riferimento al regolamento.

Per la contestualizzazione dei quesiti ci siamo a volte ispirati a fatti realmente accaduti della vita di Egnazio Danti, adattando comunque le situazioni alla peculiarità di quanto proposto. Quindi, ogni riferimento a fatti e persone è da ritenersi il frutto delle esigenze narrative del testo.

1. CRUCINUMERICO

Egnazio è un appassionato di enigmistica e tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. ***Provate a risolverlo giustificando adeguatamente i risultati ottenuti.***



ORIZZONTALI

1. La somma dei quadrati dei numeri naturali appartenenti al più piccolo insieme i cui elementi hanno le seguenti proprietà:
a) La loro somma è 30;
b) L'unica loro moda è 9;
c) La loro mediana è un numero naturale diverso da ciascuno di essi.

4. La rappresentazione in base 10 del numero n che può essere scritto: in base 14 come abc, in base 15 come acb e in base 6 come $acac$; con $a > 0$.

5. Un numero primo la cui somma delle cifre è 19.

7. Il numero di naturali n compresi tra 1 e 2025 tali che l'espressione $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{\ldots}}}}$ sia un numero razionale.

VERTICALI

1. Il numero di coppie ordinate di naturali (x, y) tali che $x^2y = 20^{20}$.

2. La somma del quoziente e del resto della divisione per 1000 del più grande numero naturale n di 4 cifre tale che, ogni qual volta una sua cifra viene sostituita con un 1, il numero che si ottiene è divisibile per 7.

3. Il numero 100*x*+4, dove x a sua volta è il numero di modi in cui si può riempire una griglia composta da due righe e tre colonne in modo tale che la somma dei due numeri che si leggono nelle righe sia uguale a 999 e la somma dei tre numeri che si leggono nelle colonne sia uguale a 99.

6. Un numero primo.

2. Coordinate ternarie

Nel 1575, il matematico e astronomo Ignazio Danti, impegnato nella realizzazione delle carte geografiche per la Galleria delle Carte Geografiche in Vaticano, sta elaborando un nuovo metodo per codificare le coordinate geografiche dei territori inesplorati. Per farlo, utilizza un sistema basato su un'operazione ternaria * che associa ad ogni tripla di simboli un nuovo elemento.

Gli assistenti di Danti, tra cui giovani studiosi di matematica e astronomia, si interrogano sulla struttura delle stringhe che si possono formare con questo metodo. Le stringhe vengono costruite a partire da un insieme di tre simboli {a, b, c}, e la lunghezza di una stringa è definita come il numero totale di simboli presenti in essa.

Esempi di stringhe di lunghezza 5, secondo il metodo di Danti, sono:

$$(*(*aca)ab) \qquad (*aa(*bbc))$$

Ora, il maestro pone ai suoi allievi due domande fondamentali:

a) **Quanti sono i territori con coordinate di lunghezza 9 che si possono formare con questa regola?**
b) **È possibile costruire coordinate di lunghezza pari? Dimostratelo.**

I giovani studiosi, ispirati dalle sfide matematiche del loro tempo, si mettono al lavoro per risolvere il problema, consapevoli che la soluzione potrebbe rivelarsi utile per i calcoli astronomici e cartografici del grande matematico. Sareste alla loro pari?

3. UN REGALO SPECIALE

Nel 1580, Ignazio Danti, decide di fare un regalo speciale ai suoi due giovani nipoti, appassionati di numeri e geometria. Per mettere alla prova la loro ingegnosità, Danti regala loro due uguali quantità di denaro, ognuna derivante da una particolare somma di potenze.

Il primo nipote riceve una somma ottenuta moltiplicando per 12 la somma delle prime venti potenze di 4:

$$S_1 = 12 \cdot (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{19})$$

Il secondo nipote, invece, riceverà una somma costruita moltiplicando per 4 la somma delle prime k potenze di 2:

$$S_2 = 4 \cdot (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1})$$

Danti sorride e dice loro:
"Ora sta a voi scoprire per quale valore di k le due somme sono uguali!"

I due giovani, entusiasti della sfida, si mettono subito al lavoro con carta e penna, pronti a svelare il mistero lasciato in dono dal loro illustre zio. Sapreste aiutarli a trovare la soluzione?

4. EGNAZIO INGEGNERE ASTRONOMO

Nel suo laboratorio presso la corte medicea, Ignazio Danti sta progettando un nuovo strumento astronomico per migliorare l'osservazione delle stelle da due punti di riferimento, B e C. Per garantire la massima precisione nelle misurazioni, Danti deve studiare le relazioni geometriche tra i punti chiave della struttura di supporto.

Considera quindi un triangolo ABC, in cui i punti E e F sono i piedi delle **simmediane** uscenti rispettivamente da B e C. Per stabilizzare il suo strumento, individua anche i punti medi M ed N, rispettivamente di EB e CF.

Mentre analizza la disposizione dei componenti, Danti si accorge di una particolare proprietà angolare:

$$\angle NBC = \angle MCB$$

Affascinato dalla simmetria della configurazione, sfida i suoi assistenti a dimostrare perché questa relazione è sempre valida. Solo comprendendo a fondo questa proprietà, potrà perfezionare il suo strumento e garantire che le osservazioni astronomiche siano il più precise possibile.

Riuscireste ad aiutare i giovani allievi a trovare la dimostrazione ricordando che le simmediane sono le simmetriche delle mediane rispetto alle bisettrici uscenti dallo stesso vertice?