11 Aprile 2025 – IX Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Squadre

---

1. CRUCINUMERICO

1		2	■	3
	■	4		
5	6		■	
■		■	7	

Egnazio è un appassionato di enigmistica e tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. ***Provate a risolverlo giustificando adeguatamente i risultati ottenuti.***

ORIZZONTALI

1. La somma dei quadrati dei numeri naturali appartenenti al più piccolo insieme i cui elementi hanno le seguenti proprietà:

a) La loro somma è 30;

b) L'unica loro moda è 9;

c) La loro mediana è un numero naturale diverso da ciascuno di essi.

4. La rappresentazione in base 10 del numero n che può essere scritto: in base 14 come abc, in base 15 come acb e in base 6 come $acac$; con a>0.

5. Un numero primo la cui somma delle cifre è 19.

7. Il numero di naturali n compresi tra 1 e 2025 tali che l'espressione $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{\ldots\ldots}}}}$ sia un numero razionale.

VERTICALI

1. Il numero di coppie ordinate di naturali (x,y) tali che $x2y$=2020.

2. La somma del quoziente e del resto della divisione per 1000 del più grande numero naturale n di 4 cifre tale che, ogni qual volta una sua cifra viene sostituita con un 1, il numero che si ottiene è divisibile per 7.

3. Il numero 100x+4, dove x a sua volta è il numero di modi in cui si può riempire una griglia composta da due righe e tre colonne in modo tale che la somma dei due numeri che si leggono nelle righe sia uguale a 999 e la somma dei tre numeri che si leggono nelle colonne sia uguale a 99.

6. Un numero primo.

Soluzione:

(1) 2	3	(2) 6	■	(3) 4
3	■	(4) 9	2	5
(5) 1	(6) 9	9	■	0
■	7	■	(7) 4	4

1-O La terza condizione implica che la lista è composta da un numero pari di elementi poiché, se fossero dispari la mediana è un valore che appartiene all'insieme di numeri. Consideriamo un insieme formato da due valori, poiché la moda deve essere unica e uguale a 9 l'insieme sarebbe formato da 2 valori uguali a 9 la cui somma è 18 che contraddice la prima ipotesi. Se la lista è composta da 4 termini, almeno due devono essere uguali a 9, la somma degli altri due termini deve essere 12. Poiché la mediana non è un valore che appartiene alla lista, gli altri due numeri non possono essere uno maggiore e uno minore di 9. Essendo tutti e due minori di 9 e tali che la mediana della lista sia un numero intero sono entrambi dispari e l'unica lista possibile è $5, 7, 9, 9$ quindi $5^2 + 7^2 + 9^2 + 9^2 = 236$.

4-O Le cifre a e c sono necessariamente minori o uguali di 5, mentre b è minore o uguale a 13. Abbiamo le seguenti equazioni: $196a + 14b + c = 225a + 15c + b = 222a + 37c$. Sottraendo la terza alla seconda otteniamo che $3a + b = 22c$. Poiché a è non negativo, allora $c \neq 0$, necessariamente $c = 1$. Quindi $3a + b = 22$. Combinando le prime due equazioni si ottiene $29a + 14 = 13b$. Risolvendo il sistema troviamo che $a = 4$, $b = 10$ e $c = 1$. Quindi $222 \cdot 4 + 37 \cdot 1 = 925$.

5-O Un numero primo di 3 cifre con somma di cifre uguale a 19 è 199

7-O Trattandosi di una somma infinita poniamo $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{\ldots}}}} = x$. Elevando entrambi i membri al quadrato otteniamo $n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{\ldots}}}} = x^2$ da cui si ottiene la seguente equazione $n + x = x^2$. Il discriminante di questa equazione è $1 + 4n$. Per essere una espressione razionale il discriminante deve essere un quadrato perfetto, quindi $1 + 4n = k^2$ e, poiché $1 \leq n \leq 2025$ deve essere k dispari e $5 \leq k\text{^}2 \leq 8101$ quindi $3 \leq k \leq 90$, pertanto ci sono 44 valori che soddisfano la richiesta.

1-V Sia $z = m^2$, dobbiamo trovare due numeri z e y tali che il loro prodotto sia uguale a 20^{20} e z sia un quadrato perfetto. Notiamo che c'è un unico valore di y per ogni valore di z che è $\frac{20^{20}}{z}$.
Il problema si riduce quindi a trovare gli unici fattori che sono quadrati perfetti di 20^{20}.
Fattorizzando 20^{20} si ottiene $(2^2)^{20} \cdot (5^2)^{10}$. Quindi la risposta è $21 \cdot 11 = 231$.

2-V Sia $abcd$ il numero cercato, poiché se scambiamo con 1 le cifre di tale numero esso è divisibile per 7 otteniamo che

$$1000 + 100b + 10c + d \equiv 0\ (mod 7)$$

$$1000a + 100 + 10c + d \equiv 0\ (mod 7)$$

$$1000a + 100b + 10 + d \equiv 0\ (mod 7)$$

$$1000a + 100b + 10c + 1 \equiv 0\ (mod 7)$$

Sommando le equazioni otteniamo che

$$3000a + 300b + 30c + 3d + 1111 \equiv 0\ (mod 7)$$

Poiché $1111 \equiv 5\ (mod 7)$ si ottiene che $3abcd \equiv 2\ (mod 7)$ da cui $abcd \equiv 3\ (mod 7)$. Poiché sappiamo che, se cambio qualsiasi cifra con 1 il numero è divisibile per 7 abbiamo che $1000a - 1000$, $100b - 100$, $10c - 10$, $d - 1$ hanno resto 3 nella divisione per 7. Quindi $d = 4$, $c = 9, d = 6$ e $a = 5$. Il numero cercato è 5694, il quoziente e il resto della divisione per 1000 sono rispettivamente 5 e 694 quindi $5 + 694 = 699$.

3-V Per calcolare la x richiesta consideriamo la griglia sottostante

a	b	c
d	e	f

$c + f \leq 18$ poiché a, b, c, d, e, f sono cifre e quindi sono minori o uguali a 9. $c + f = 9$ poiché la somma delle unità deve essere 9. Poiché nelle somme non è possibile avere riporti anche $b + e = 9$ e $a + d = 9$. Otteniamo quindi

a	b	c
$9 - a$	$9 - b$	$9 - c$

Sappiamo inoltre che $10(a + b + c) + 9 - a + 9 - b + 9 - c = 99$ quindi $9(a + b + c + 3) = 99$ da cui $a + b + c = 8$. Poiché è ammessa anche la cifra 0, il numero di possibili griglie è dato dal numero di terne di 3 numeri tali che la somma sia 8, quindi $\binom{8+3-1}{3-1} = 45$. Quindi la soluzione 100x+4 è 4504.

6-V L'unico numero primo che ha 9 come cifra delle decine è 97.

2. COORDINATE TERNARIE

Nel 1575, il matematico e astronomo Ignazio Danti, impegnato nella realizzazione delle carte geografiche per la Galleria delle Carte Geografiche in Vaticano, sta elaborando un nuovo metodo per codificare le coordinate geografiche dei territori inesplorati. Per farlo, utilizza un sistema basato su un'operazione ternaria * che associa ad ogni tripla di simboli un nuovo elemento.

Gli assistenti di Danti, tra cui giovani studiosi di matematica e astronomia, si interrogano sulla struttura delle stringhe che si possono formare con questo metodo. Le stringhe vengono costruite a partire da un insieme di tre simboli {a, b, c}, e la lunghezza di una stringa è definita come il numero totale di simboli presenti in essa.

Esempi di stringhe di lunghezza 5, secondo il metodo di Danti, sono:

$$(*(*aca)ab) \qquad (*aa(*bbc))$$

Ora, il maestro pone ai suoi allievi due domande fondamentali:

a) Quanti sono i territori con coordinate di lunghezza 9 che si possono formare con questa regola?
b) È possibile costruire coordinate di lunghezza pari? Dimostratelo.

I giovani studiosi, ispirati dalle sfide matematiche del loro tempo, si mettono al lavoro per risolvere il problema, consapevoli che la soluzione potrebbe rivelarsi utile per i calcoli astronomici e cartografici del grande matematico.

Soluzione:

a. Le stringhe in questione hanno 9 lettere scelte fra a, b e c, e 4 ripetizioni del simbolo $*$ e le parentesi. Per contarle si sceglie prima di tutto una sequenza ordinata di 9 simboli fra a, b e c. Ciò si può fare in 3^9 modi. Una volta scelte le 9 lettere, per contare il numero di stringhe che si possono formare con le 9 lettere scelte, costruiamo un albero ternario che rispecchi la struttura della stringa. L'albero ha 4 nodi inclusa la radice (che corrispondono alle 4 ripetizioni del simbolo $*$) e 9 foglie (le lettere scelte). Gli alberi siffatti sono 55. Quindi in tutto le stringhe sono

$$3^9 \cdot 55$$

b. Possiamo dimostrare che la lunghezza delle stringhe in questione segue la sequenza dei numeri dispari $2n + 1$ dove n è il numero di nodi dell'albero ternario di cui abbiamo parlato al punto precedente che non sono foglie (ovvero il numero delle volte in cui compare il simbolo $*$ stringa).

Base: se abbiamo una sola occorrenza del simbolo $*$ allora le stringhe hanno lunghezza 3 (sono del tipo $(* xyz)$ dove x, y, z appartengono all'insieme $\{a, b, c\}$)

Passo: supponiamo che per n occorrenze del simbolo $*$ si abbiano parole di lunghezza $2n + 1$. Aggiungiamo a uno qualsiasi degli alberi che danno origine alla parola di lunghezza $2n + 1$ un ulteriore simbolo $*$, l'unico modo che abbiamo per farlo è sostituire $*$ a una delle foglie (cioè, a una delle lettere). In questo modo togliamo una lettera e ne aggiungiamo 3 (le tre foglie del nuovo nodo. Quindi la lunghezza della stringa con $n+1$ occorrenze del simbolo $*$ risulta essere:

$$2n+1-1+3=2n+3=2(n+1)+1$$

3. UN REGALO SPECIALE

Nel 1580, Ignazio Danti, decide di fare un regalo speciale ai suoi due giovani nipoti, appassionati di numeri e geometria. Per mettere alla prova la loro ingegnosità, Danti regala loro due uguali quantità di denaro, ognuna derivante da una particolare somma di potenze.

Il primo nipote riceve una somma ottenuta moltiplicando per 12 la somma delle prime venti potenze di 4:

$S1 = 12 \cdot (1+4+4^2+\cdots+4^{19})$

Il secondo nipote, invece, riceverà una somma costruita moltiplicando per 4 la somma delle prime k potenze di 2:

S2=$4 \cdot (1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})$

Danti sorride e dice loro:
"Ora sta a voi scoprire per quale valore di k le due somme sono uguali!"

I due giovani, entusiasti della sfida, si mettono subito al lavoro con carta e penna, pronti a svelare il mistero lasciato in dono dal loro illustre zio.

Soluzione: la prima somma è pari a $12\sum_{i=0}^{19} 4^i = 12\frac{4^{20}-1}{4-1} = 4\cdot(4^{20}-1) = 4^{21}-4 = 2^{42}-4$.

Invece la seconda somma è pari a $4\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 4(2^k-1) = 2^{k+2}-4$. Uguagliando le due quantità si ottiene $k+2=42$, cioè $k=40$.

5. EGNAZIO INGEGNERE ASTRONOMO

Nel suo laboratorio presso la corte medicea, Ignazio Danti sta progettando un nuovo strumento astronomico per migliorare l'osservazione delle stelle da due punti di riferimento, B e C. Per garantire la massima precisione nelle misurazioni, Danti deve studiare le relazioni geometriche tra i punti chiave della struttura di supporto.

Considera quindi un triangolo ABC, in cui i punti E e F sono i piedi delle **simmediane** uscenti rispettivamente da B e C. Per stabilizzare il suo strumento, individua anche i punti medi M ed N, rispettivamente di EB e CF.

Mentre analizza la disposizione dei componenti, Danti si accorge di una particolare proprietà angolare:

$$\angle NBC = \angle MCB$$

Affascinato dalla simmetria della configurazione, sfida i suoi assistenti a dimostrare perché questa relazione è sempre valida. Solo comprendendo a fondo questa proprietà, potrà perfezionare il suo strumento e garantire che le osservazioni astronomiche siano il più precise possibile.

Riusciranno i suoi giovani allievi a trovare la dimostrazione ricordando che le simmediane sono le simmetriche delle mediane rispetto alle bisettrici uscenti dallo stesso vertice?

Soluzione:

Sia ω la circonferenza circoscritta a $\triangle ABC$ e siano P e Q i punti medi di AC e AB rispettivamente. Definiamo inoltre $R=BP\cap\omega$ e $S=CQ\cap\omega$.

Lemma. $\angle PRQ=\angle QSP$.

Dimostrazione.

$PQSR$ è ciclico, infatti, osservando che $BC\parallel PQ$, abbiamo che $\angle PRS=\angle BRS=\angle BCS=\angle BCQ=\angle CQP$ e similmente $\angle QSR=\angle BPQ$. Pertanto $\angle PRQ=\angle QSP$, come desiderato.

I triangoli $\triangle ABR$ e $\triangle EBC$ sono simili poiché $\angle BRA=\angle BCA=\angle EBC$ e $\angle ABR=\angle CBE$ (la simmediana per definizione è simmetrica alla mediana rispetto alla bisettrice uscente dallo stesso vertice).

Dalla similitudine di $\triangle ABR$ e $\triangle EBC$ segue la similitudine di $\triangle QBR$ e $\triangle MBC$ da cui si ha $\angle PRQ=\angle BRQ=\angle BCM$. Analogamente si può provare che $\angle QSP=\angle CBN$. In conclusione, per il lemma dimostrato, $\angle BCM=\angle PRQ=\angle QSP=\angle CBN$.