11 Aprile 2025 – IX Edizione

# Gara di Matematica Premio Danti
# Individuale

Londra, fine Ottocento. **William Burnside**, immerso nei suoi studi sulla teoria dei gruppi e sulle simmetrie, si addormenta esausto dopo una lunga giornata di calcoli. Nel sogno, si trova in una grande stanza affrescata, circondato da antichi strumenti astronomici e carte geografiche dettagliate. Di fronte a lui, un uomo con la barba curata e un'aria da scienziato rinascimentale lo osserva con sguardo acuto.

**"Io sono Ignazio Danti,"** dice lo sconosciuto. **"Ho dedicato la mia vita alla matematica, alla cartografia e agli strumenti astronomici. Voglio proporti un problema che mi ha tormentato per anni, ma che forse tu, con le tue moderne conoscenze, potrai finalmente risolvere."**

Sul tavolo davanti a Burnside appare un **quadrante astronomico esagonale**, uno strumento che Danti usava per orientarsi tra le stelle. I suoi sei lati sono dipinti di tre colori diversi: due rossi, due blu e due verdi.

**a) "Dimmi, in quanti modi posso colorare i lati dell'esagono rispettando questa condizione?"**
Burnside riflette e inizia a calcolare e, dopo aver svolto alcuni calcoli, fornisce la risposta a Danti il quale, non soddisfatto, gli chiede ancora con un sorriso:
**b) "Il mio strumento può essere ruotato senza che la disposizione dei colori cambi la sua funzionalità. Se consideriamo uguali due colorazioni che si ottengono ruotando l'esagono, quante configurazioni realmente distinte esistono?"**

Burnside annuisce, comprendendo la sfida. Poi, Danti alza un sopracciglio e aggiunge:
**c) "E se il mio strumento potesse anche essere ribaltato? In questo caso, quante sarebbero le colorazioni davvero uniche?"**

Forse non saprà mai se è stato solo un sogno o un vero incontro tra menti brillanti di epoche diverse. Ma una cosa è certa: il problema di Danti ha trovato, dopo secoli, un metodo per essere risolto.

---

Soluzione:

a) Per prima cosa si calcolano i casi totali a meno di trasformazioni.

Il numero di modi per colorare i sei lati corrisponde al numero di anagrammi della parola RRBBVV che sono $6!:2^3 = 90$.

b) Ora elenchiamo tutte le trasformazioni dell'esagono e contiamo quante delle 90 configurazioni rimangono fisse per ciascuna trasformazione. Nel primo punto le trasformazioni sono le rotazioni rispetto al centro che sono 6.

L'identità, come sempre, fissa tutto.

Le due rotazioni di 60° in senso orario e in senso antiorario non possono fissare nessuna delle 90 configurazioni perché le uniche che potrebbero fissare sarebbero quelle monocromatiche.

Le due rotazioni di 120° orario e antiorario, ugualmente, non possono fissare nessuna delle 90 configurazioni perché le uniche che potrebbero fissare sono quelle con un colore che si ripete 3 volte (ogni 120°).

Infine, la rotazione di 180° fissa tutte e sole le configurazioni in cui i lati con lo stesso colore sono diametralmente opposti e queste sono $3!=6$.

Per Burnside il risultato è $(90+2\cdot 0+2\cdot 0+6):6=16$.

c) Adesso aggiungiamo, oltre alle 6 rotazioni, il contributo dei 6 ribaltamenti che sono di due tipi:

i ribaltamenti rispetto ai tre assi di simmetria che passano per due vertici diametralmente opposti fissano tutte le configurazioni che hanno i tre colori da una parte e che sono specchiati rispetto all'asse. Questi sono sempre $3!=6$.

Invece gli altri tre ribaltamenti sono rispetto ai tre assi di simmetria che passano per i punti medi di due lati opposti. Anche in questo caso le configurazioni fissate sono $3!=6$.

In totale $(90+2\cdot 0+2\cdot 0+6+3\cdot 6+3\cdot 6):12=11$.