

STAGE PERUGIA 2024

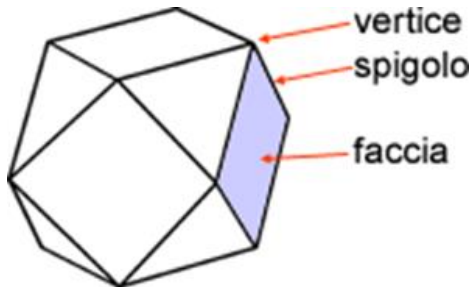
Formula di Eulero

Lorenzo Mazza

08/02/2024

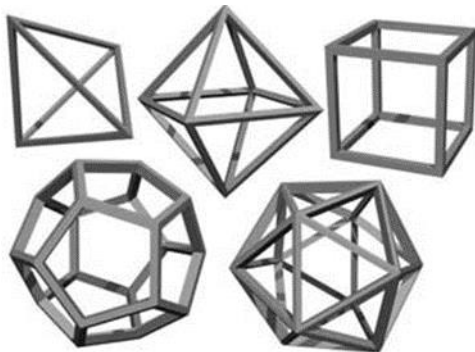
Poliedri

Solido delimitato da un numero finito di poligoni piani che prendono il nome di **facce** del poliedro. I lati di tali poligoni sono gli **spigoli** del poliedro e i vertici di tali poligoni sono i **vertici** del poliedro.



Poliedri e Solidi Platonici

I Solidi Platonici sono **poliedri regolari**, nel senso che le loro facce sono tutti poligoni regolari uguali fra loro e in ogni vertice del poliedro concorre lo stesso numero di facce.



Tetraedro, Ottaedro, Cubo, Dodecaedro e Icosaedro

La formula di Eulero

	vertici	spigoli	facce
tetraedro	4	6	4
ottaedro	6	12	8
cubo	8	12	6
dodecaedro	20	30	12
icosaedro	12	30	20

Analizzando attentamente la tabella si vede che vale l'uguaglianza seguente:

$$F + V = S + 2 \quad \text{o equivalentemente} \quad V - S + F = 2$$

... Fatti Vedere Sabato alle 2 ...

Formula di Eulero e poliedri semplici

Questa uguaglianza, trovata nel 1640 da Descartes e riscoperta e usata da Eulero nel 1752, prende il nome di **formula di Eulero** e vale per ogni poliedro *semplice*. Un poliedro si dice *semplice* se non ha "buchi".

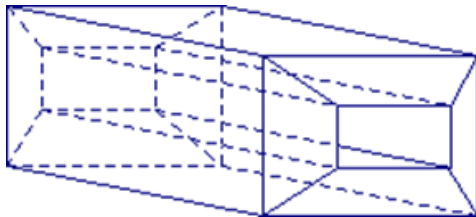


Figura: Poliedro non semplice

Problema 1 (Giochi di Archimede, 1996)

Un pallone di cuoio è ottenuto cucendo 20 pezzi di cuoio a forma esagonale e 12 pezzi di cuoio a forma pentagonale. Una cucitura unisce i lati di due pezzi adiacenti. Allora il numero totale delle cuciture è:

- A. 90;
- B. 172;
- C. 176;
- D. 180;
- E. i dati del problema sono insufficienti.



Soluzione al Problema 1

Contando il numero delle cuciture adiacenti agli esagoni ($6 \cdot 20 = 120$) più il numero delle cuciture adiacenti ai pentagoni ($5 \cdot 12 = 60$), ogni cucitura viene contata due volte, poiché essa è adiacente a due poligoni. Pertanto $(120 + 60) : 2 = 90$. La risposta corretta è la A.

OPPURE...

Il numero totale F di facce del pallone è pari a $12 + 20 = 32$ mentre il numero totale di vertici V , tenendo conto che ognuno di essi è comune a due facce esagonali ed una pentagonale, è pari a

$$\frac{1}{3} (5 \cdot 12 + 6 \cdot 20) = 60.$$

Ne consegue che il numero totale di cuciture S , per la formula di Eulero, è pari a $S = 32 + 60 - 2 = 90$.

Problema 2 + Soluzione

Dimostrare che, dati 5 punti sul piano, è impossibile collegare con delle linee ogni punto a tutti gli altri in maniera che le linee non si intersechino.

Supponiamo per assurdo di aver tracciato i cinque punti con tutte le connessioni; si tratta di un grafo planare semplice connesso su 5 vertici. Il numero di archi del grafo è $\binom{5}{2} = 10$.

Applicando la formula di Eulero con $V = 5$ e $S = 10$ si ottiene:

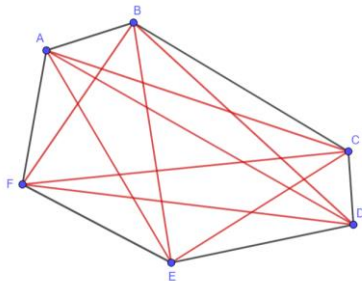
$$5 - 10 + F = 2 \quad \text{da cui} \quad F = 7$$

Ora, dato che ogni faccia del grafo deve essere delimitata da almeno 3 archi e che ogni arco è in comune tra due facce, abbiamo:

$3 \cdot F \leq S \cdot 2$, ovvero $S \geq \frac{3 \cdot F}{2} = \frac{21}{2}$ in contraddizione con il valore 10 precedentemente trovato.

Problema 3

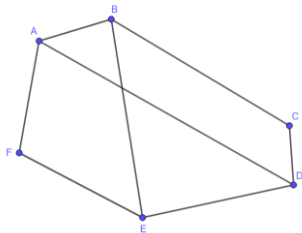
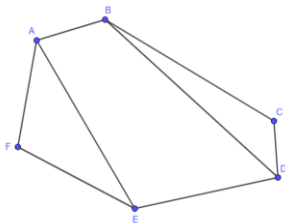
- Quante sono le diagonali di un poligono convesso avente n lati?
- In quanti punti all'interno del poligono esse si intersecano [supponendo che non ci siano terne di diagonali concorrenti]?
- In quante regioni esse suddividono il poligono?



Soluzione al Problema 3 - I

- Il numero di diagonali è pari a $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

- Per capire quanti sono i punti di intersezione delle diagonali interni al poligono, si deve tener presente che non tutte le diagonali si intersecano. Però, comunque si prendono quattro vertici distinti, ho uno ed un solo punto di intersezione delle diagonali. Dunque risultano essere $\binom{n}{4}$.



Soluzione al Problema 3 - II

- Per capire in quante regioni le diagonali dividono il poligono, si può far uso della formula di Eulero.

$V = n + \binom{n}{4}$ (il numero di vertici è pari alla somma fra il numero di vertici del poligono e i punti di intersezione delle diagonali)

$$S = n + \frac{n(n-3)}{2} + 2 \binom{n}{4}$$

Risulta $F = S - V + 2$ ma, eliminando la faccia esterna al poligono, si ha $F = S - V + 1 = n + \frac{n(n-3)}{2} + 2 \binom{n}{4} - n - \binom{n}{4} + 1 = \binom{n}{4} + \frac{n(n-3)}{2} + 1$