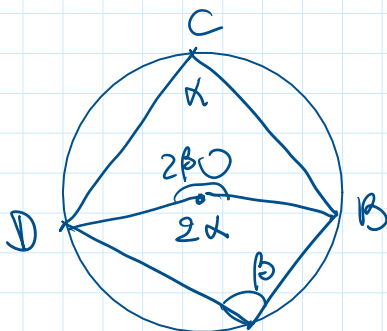


# GIOCARE CON I QUADRILATERI CICLICI

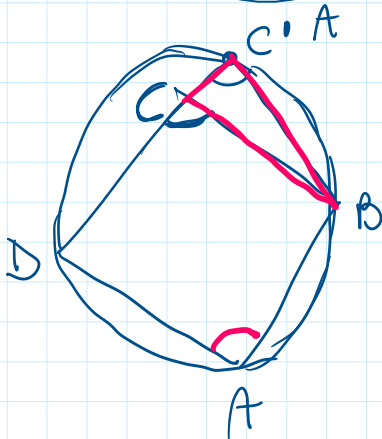
Def. Un quadrilatero ciclico è un quadrilatero inscritto in una circonferenza

CNES ① Affinchè un quadrilatero sia ciclico è che gli angoli opposti siano supplementari



$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



Ip.  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$

TS Il quadrilatero è ciclico

Dim. per assurdo

Sia ABCD non ciclico

e sia  $\omega$  la circonferenza

per A B D

sia C' l'intersezione tra il prolungamento

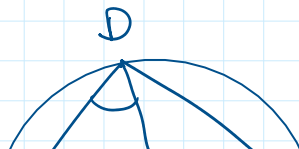
di CD e  $\omega \Rightarrow ABC'D$  è ciclico  $\Rightarrow \hat{A} + \hat{C}' = 180^\circ$

Ma per ip.  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{C}' \neq$

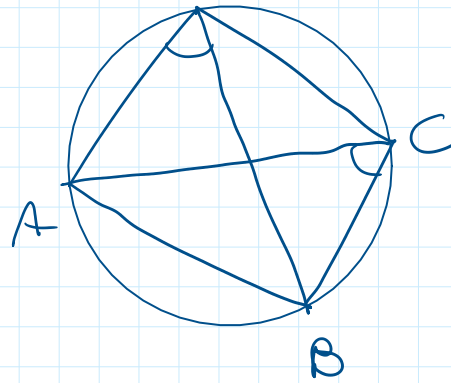
CNES. ②

Un quadrilatero è ciclico  $\Leftrightarrow$  i vertici C e D "vedono" il segmento AB sotto lo stesso angolo

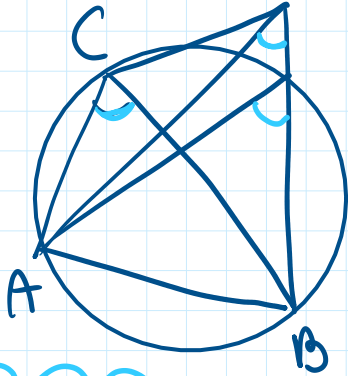
ABCD ciclico



$ABCD$  ciclico



⤴ la proprietà è vera  $\Rightarrow ABCD$  è ciclico



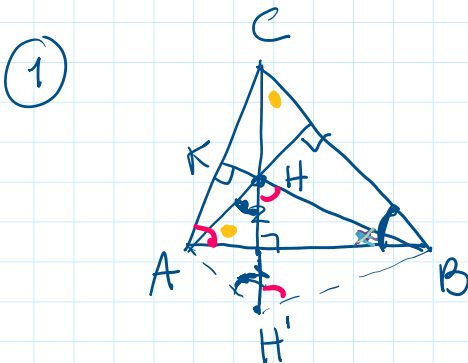
Dim. per assurdo  
come prima  
(si fa contro il Teorema  
dell'angolo esterno)

Fatti Belli

Sia  $ABC$  un triangolo con ortocentro  $H$ ,  
baricentro  $G$  e incentro  $I$

Stanno sulla circonferenza circoscritta ad  $ABC$

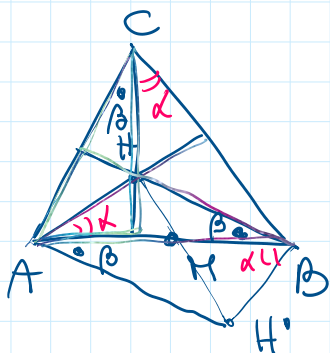
- ①  $H'$  simmetrico di  $H$  rispetto ad  $AB$
- ②  $H'$  simmetrico di  $H$  rispetto al punto medio di  $AB$
- ③  $H'$  circocentro di  $ABI$
- ④ L'intersezione tra l'asse di  $AB$  e la bisettrice  
esterna dell'angolo in  $C$



Sia  $H'$  il simmetrico di  $H$  rispetto ad  $AB$

$H$   
 Sia  $H'$  il simmetrico di  $H$  rispetto ad  $AB$   
 D.D. che  $AH'BC$  è ciclico  
 Avremo che  $\widehat{AH'H} \cong \widehat{AH'H} \cong \widehat{ABC}$  e  
 $\widehat{BH'H} \cong \widehat{BH'H} \cong \widehat{CAB}$  ma allora, poiché  
 $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{CAB} - \widehat{CBA}$  si ha  
 $\widehat{ACB} + \widehat{AH'B} = 180^\circ$

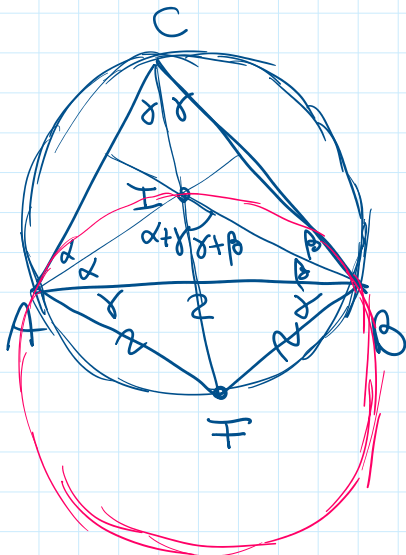
(2)



$H$  punto medio,  $H'$  simmetrico di  $H$   
 rispetto ad  $AB$ . Vogliamo dimostrare  
 che  $AH'BC$  è ciclico

$AH'BH$  è un parallelogramma  
 Dagli angoli congruenti colorati in figura  
 si ha che  $\widehat{AH'B} = 180^\circ - \alpha - \beta$  ma  
 $\widehat{ACB} = \alpha + \beta$   
 $\Rightarrow \widehat{AH'B} + \widehat{ACB} = 180^\circ$  e  $AH'BC$  è ciclico

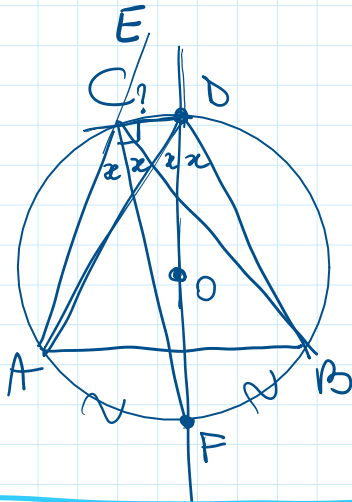
(3)



$\widehat{AF} \cong \widehat{FB}$   
 Da dimostrare che  
 $AF = FI$   
 $\widehat{AIF} = \alpha + \gamma$   
 $\widehat{FAB} = \widehat{FBA} = \gamma$   
 $\widehat{FAI} = \alpha + \gamma = \widehat{AIF}$   
 $\downarrow$   
 Th. angolo esterno

Analogamente  $FI \cong FB \Rightarrow F$  è il centro della  
 circonferenza circoscritta ad  $ABI$

4

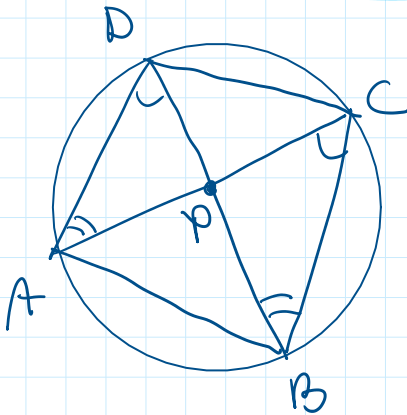


Da dimostrare che  
CD è l'altituda di  $\widehat{ECB}$

$$\widehat{BCD} = 90 - x$$

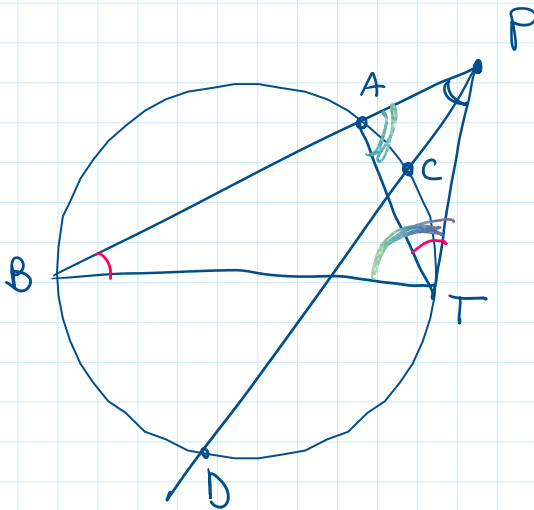
$$\widehat{ECD} = 180 - x - x - (90 - x) = 90 - x$$

ALTRO FATTO IMPORTANTE



APD N BPC

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC} \Leftrightarrow \boxed{PA \cdot PC = PB \cdot PD}$$



Considero i triangoli ATP e

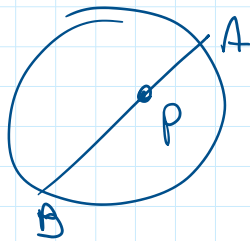
PBT sono simili

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Leftrightarrow \boxed{PA \cdot PB = PT^2}$$

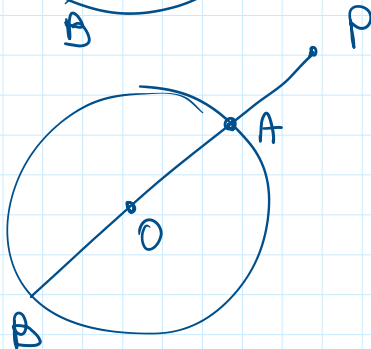
$$\boxed{PC \cdot PD = PT^2}$$

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\text{pow}(P) = PA \cdot PB$$



$$\text{pow}(P) = PA \cdot PB$$

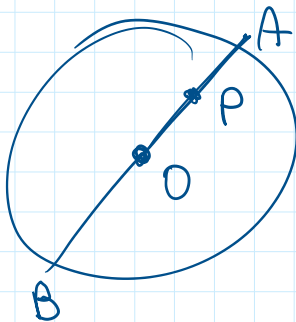


$$\text{pow}(P) = PA \cdot PB$$

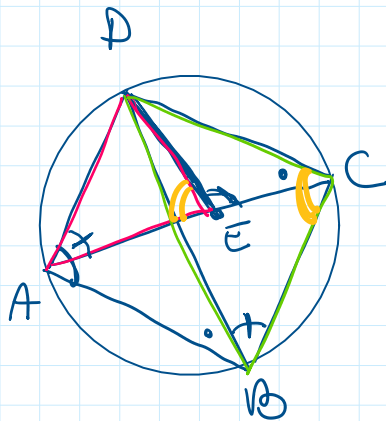
$$PA = PO - r$$

$$PB = PO + r$$

$$PA \cdot PB = PO^2 - r^2$$



$$PA \cdot PB = (r - PO)(r + PO) = r^2 - PO^2$$



$ABCD$  é cíclico

$$\Rightarrow AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

Se  $E \in AC$  t.c.  $\hat{DAB} = \hat{DEC}$

Triângulos  $ABD$  e  $DEC$  semelhantes

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow EC = \frac{AB \cdot DC}{BD}$$

$AED \sim BCD$

$$\hat{AED} = 180^\circ - \hat{DAB}$$

$$\hat{BCD} = 180^\circ - \hat{DAB}$$

$$AE : BC = AD : BD \Rightarrow AE = \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

$$AC = AE + EC$$

$$AC = \frac{AB \cdot DC}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD \quad \text{c. j. d.}$$