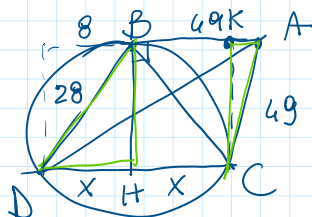


1. Data una circonferenza ω sia A un punto esterno ad essa da cui si tracciano le tangenti; siano B e C i due punti di tangenza. Sia CD parallelo ad AB con D punto sulla circonferenza. Se $AB=49$ e $BD=28$, quanto misura AD?
2. Dato un triangolo DEF, ottusangolo in E, sia O il centro della circonferenza ad esso circoscritta. Detto P il punto nel quale la bisettrice uscente da E interseca il lato DF, è noto che il quadrilatero convesso FEPO è ciclico. Sapendo che $\angle EDF = 52^\circ$, qual è l'ampiezza dell'angolo $\angle DFE$?
3. Sia O esterno alla circonferenza ω . Sia OA tangente alla circonferenza. Tracciamo la corda $BC \parallel OA$ e siano K, L rispettivamente le altre intersezioni delle rette OB e OC con ω . Dimostrare che la retta KL divide a metà OA.
4. Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano D, E i piedi delle altezze uscenti da A, B. Siano A' il punto medio di AD, B' il punto medio di BE. CA' interseca BE in X, CB' interseca AD in Y. Dimostrare che esiste una circonferenza passante per A', B', X e Y.
5. Dato un triangolo equilatero ABC, sia P un punto della circonferenza a esso circoscritta appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP+BP=CP$.
6. Sia ABCDE un pentagono regolare. Sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP+BP+DP=CP+EP$.
7. Sia ABCD un quadrilatero ciclico con ABC triangolo equilatero, $\angle CAD = 15^\circ$ e $AD = 12$ cm. Calcolare l'area di ABCD.
8. Un Quadrilatero ABCD è inscritto in una circonferenza ω . La tangente a ω in B interseca la semiretta DC in K e la tangente a ω in C interseca la semiretta AB in M. Dimostrare che, se $BM = BA$ e $CK = CD$, allora ABCD è un trapezio.
9. Sia ABCD un quadrato, E il punto medio di AD e F il punto medio di CD. G è il punto di intersezione fra AF e BE. Dimostrare che $CG = BC$.

①



$$AB = 49$$

$$BD = 28$$

$$AK = 49 - x$$

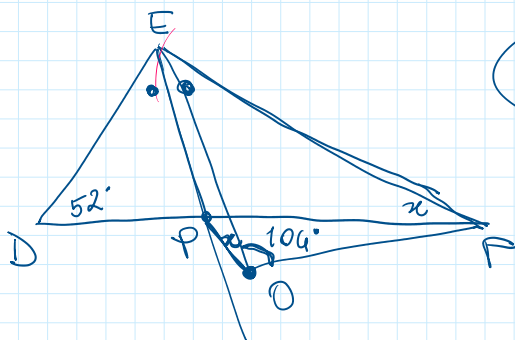
$$28^2 - x^2 = 49^2 - (49 - x)^2$$

$$28^2 - x^2 = 49^2 - 49^2 + 2 \cdot 49x - x^2$$

$$x = \frac{28 \cdot 28}{2 \cdot 49} = 8$$

$$AD = \sqrt{57^2 + (28 - 8)^2} = 63$$

2. Dato un triangolo DEF, ottusangolo in E, sia O il centro della circonferenza ad esso circoscritta. Detto P il punto nel quale la bisettrice uscente da E interseca il lato DF, è noto che il quadrilatero convesso FEPO è ciclico. Sapendo che $\angle EDF = 52^\circ$, qual è l'ampiezza dell'angolo $\angle DFE$?



FEPO è ciclico
per ipotesi

$$\widehat{DPE} = x$$

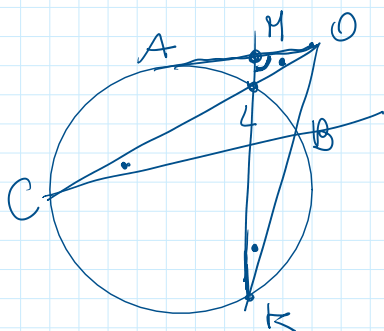
$$\widehat{POF} = 104^\circ + x$$

$$\widehat{PEF} = \frac{180 - 52 - x}{2}$$

$$104^\circ + x + \frac{180^\circ - 52^\circ - x}{2} = 180^\circ$$

$$x = 24^\circ$$

3. Sia O esterno alla circonferenza ω . Sia OA tangente alla circonferenza. Tracciamo la corda BC // OA e siano K, L rispettivamente le altre intersezioni delle rette OB e OC con ω . Dimostrare che la retta KL divide a metà OA.



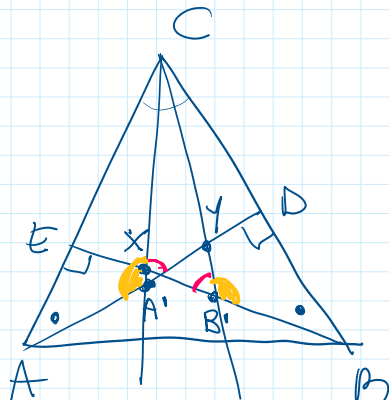
$$LOM \sim HKO$$

$$\frac{KO}{HK} = \frac{HL}{KO} \Rightarrow KO^2 = HK \cdot HL$$

$$AK^2 = HL \cdot HK$$

$$\Rightarrow AK \cong KO$$

4. Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano D, E i piedi delle altezze uscenti da A, B. Siano A' il punto medio di AD, B' il punto medio di BE. CA' interseca BE in X, CB' interseca AD in Y. Dimostrare che esiste una circonferenza passante per A', B', X e Y.



$$ADC \sim EBC$$

$$\frac{AD}{BE} = k$$

$$AA'C \sim CB'B$$

$$\frac{AC}{BC} = k$$

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\frac{AD}{2}}{\frac{BE}{2}} = k$$

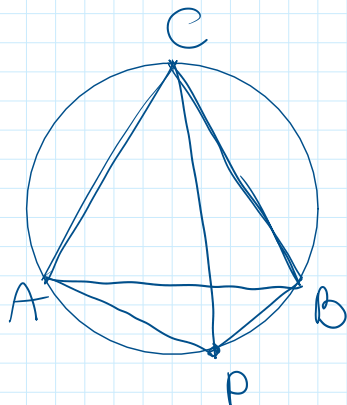
$$\Rightarrow \hat{A}A'C \cong \hat{B}B'C \text{ (dalle similitudine) e quindi}$$

$$\hat{X}A'Y \cong \hat{Y}B'X \text{ perche sepp. di angoli congruenti}$$



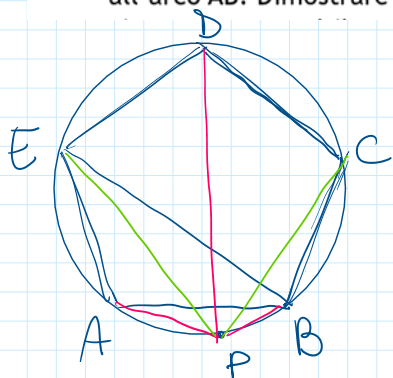
$$A'B'YX \text{ stanno su una circonferenza}$$

5. Dato un triangolo equilatero ABC, sia P un punto della circonferenza a esso circoscritta appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP + BP = CP$



$$l \cdot AB \cdot PC = l \cdot AC \cdot PB + l \cdot BC \cdot PA$$

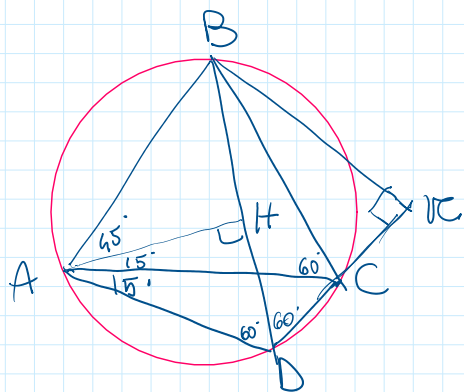
6. Sia ABCDE un pentagono regolare. Sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP + BP + DP = CP + EP$.



$$l = AB$$

$$EB = d$$

7. Sia ABCD un quadrilatero ciclico con ABC triangolo equilatero, $\angle CAD = 15^\circ$ e $AD = 12$ cm. Calcolare l'area di ABCD.



$$\hat{CAD} = 15^\circ$$

$$BD = AD + DC$$

$$AD = 12$$

$$[ADC B] = [ADB] + [DCB]$$

ATH è un triangolo rettangolo isoscele

$$AH = 6\sqrt{3} = BH \quad DH = 6 \quad BD = 6(\sqrt{3} + 1)$$

$$[ADB] = \frac{6(\sqrt{3} + 1) \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$$

$$DC = BD - AD = 6\sqrt{3} + 6 - 12 = 6(\sqrt{3} - 1)$$

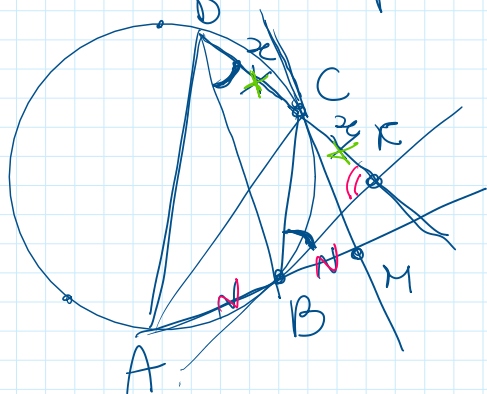
$$BC = \frac{BD}{2} \sqrt{3} = 3\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$$

$$[DCB] = 6(\sqrt{3}-1) \cdot 3\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$$

$$[ABCD] = 54 + 18\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 54 + 36\sqrt{3}$$

8. Un Quadrilatero ABCD è inscritto in una circonferenza ω . La tangente a ω in B interseca la semiretta DC in K e la tangente a ω in C interseca la semiretta AB in M. Dimostrare che, se $BM = BA$ e $CK = CD$, allora ABCD è un trapezio.

Oss. Un quadrilatero ciclico con diagonali congruenti è un trapezio isoscele



$$BK = BA$$

$$CK = CD$$

$$\text{pot}(K) = 2x \cdot x = 2x^2$$

$$\stackrel{1)}{BK^2}$$

$$BK^2 = 2x^2$$

$$\Rightarrow BK = x\sqrt{2}$$

$$BKC \sim BKD$$

$$BC : BD = x : BK \Rightarrow$$

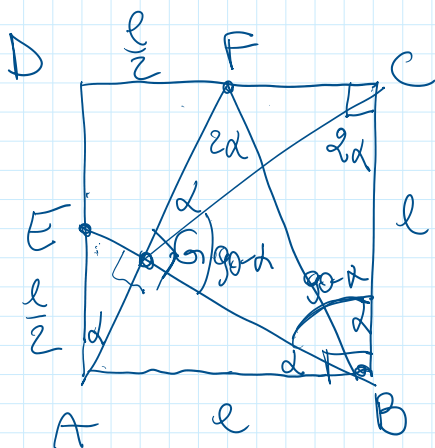
$$\frac{BC}{BD} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Analogamente

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = BD$$

cioè il quadrilatero ABCD ha le diagonali congruenti, dunque è un trapezio

9. Sia ABCD un quadrato, E il punto medio di AD e F il punto medio di CD. G è il punto di intersezione fra AF e BE. Dimostra che $CG = BC$.



Da dim. che

$$CG \cong BC$$

Oss. $\triangle BCF$ è isoscele