

19 Aprile 2024 – VIII Edizione



# Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

1. La gara consiste nella risoluzione in 120 minuti di quattro quesiti assegnati del valore di 10 punti ciascuno.
2. La soluzione di ciascun quesito richiede una dettagliata **argomentazione** o **dimostrazione**.
3. È consentito l'utilizzo di qualsiasi strumento (righello, compasso, software, ...) ma è **assolutamente vietata, pena l'esclusione, la comunicazione con esterni alla squadra**.
4. Durante i primi 30 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
5. I componenti della squadra non possono lasciare l'aula di gara prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 90 minuti dall'inizio.
6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in modo ordinato e leggibile esclusivamente sui fogli consegnati dal commissario. A pena di esclusione, l'elaborato NON dovrà contenere segni che lo rendano riconducibile alla squadra o alla scuola. Il nome del capitano e della scuola dovranno essere scritti nel foglio appositamente predisposto che verrà restituito in busta chiusa. Quest'ultima, insieme all'elaborato, sarà a sua volta inserita in una busta che verrà sigillata e consegnata al commissario.
7. Per quanto non indicato si fa riferimento al regolamento.

---

*Per la contestualizzazione dei quesiti ci siamo a volte ispirati a fatti realmente accaduti della vita di Egnazio Danti, adattando comunque le situazioni alla peculiarità di quanto proposto. Quindi, ogni riferimento a fatti e persone è da ritenersi il frutto delle esigenze narrative del testo.*

# 1. CRUCINUMERICO

Egnazio è un appassionato di enigmistica e tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. *Provate a risolverlo giustificando adeguatamente i risultati ottenuti.*

1	2	3		■
4			■	5
	■	■	6	
■	7		■	

## ORIZZONTALI

1. Il numero di terne  $(a, b, c)$  di interi  $a, b$  e  $c$  dove  $a \cdot b \cdot c = 3600$ .
4. Il più grande numero della progressione aritmetica formata da 6 termini la cui somma è 990 e che ha il primo termine uguale alla metà dell'ultimo.
6. il numero di coppie  $(a, b)$  tali che  $2^a - 2^b < 1000$  con  $0 \leq b < a$  interi.
7. La somma del primo e dell'ultimo termine di una sequenza di 8 interi non negativi tali che la somma di tre termini consecutivi è 30 e il terzo termine è 5.

## VERTICALI

1. Il numero positivo  $abc$  tale che la sua rappresentazione in base 9 sia  $bca$  (le cifre  $a, b, c$  non sono necessariamente distinte).
2. La somma degli esponenti della fattorizzazione in fattori primi della somma di tutti gli  $m$  che rendono il rapporto  $\frac{13!}{m}$  un quadrato perfetto.
3. Un numero congruo a 0 modulo 3, modulo 4 e modulo 5.
5. Il numero di punti di un piano dove si intersecano esattamente due rette appartenenti a un insieme di 50 rette a due a due non parallele in cui solo in 3 punti del piano si incontrano 3 rette dell'insieme, solo in 4 si incontrano 4 rette, ..., solo in 7 punti si incontrano 7 rette, in nessun punto si incontrano più di 7 rette.

## 2. L'EREDITÀ NASCOSTA

Egnazio Danti lasciò in eredità al nipote Giulio, figlio di Girolamo, le carte di famiglia che aveva gelosamente raccolto, un album di disegni simile a quello tenuto dal Vasari, la sua ricca biblioteca, e probabilmente un commentario di Vitruvio. **Al nipote lasciò indicazioni su dove trovare l'eredità facendo riferimento a un numero da determinare, ovvero il resto della divisione per 19 della somma dei primi 40 termini della successione così costruita:**

- le prime tre cifre sono sempre 120;
- le cifre centrali sono una serie di "3", ed ogni termine della successione ha un 3 in più rispetto al termine precedente;
- le ultime due cifre formano un numero maggiorato di un'unità rispetto al numero formato dalle ultime due cifre del termine precedente;
- il primo termine della successione è  $a_1 = 120314$ .

**A quale numero doveva far riferimento Giulio per accedere alla sua eredità?**

### **3. DAL TIRRENO ALL'ADRIATICO**

*Nel 1574 Egnazio stava lavorando ad un progetto molto ambizioso che avrebbe consentito il collegamento dei mari Tirreno e Adriatico attraverso l'Arno e vari canali con chiuse e laghi artificiali. Per la sua realizzazione individuò 5 diverse località geografiche e cercò di progettare, però senza successo, un sistema di navigazione in grado di collegare ciascuna di esse alle altre 4 attraverso canali indipendenti senza punti o tratti in comune. Dimostrare che è effettivamente impossibile effettuare tali collegamenti.*

#### 4. EGNAZIO GEOMETRA

*Il Danti pubblicò numerose opere di geometria, tra le quali le “Sette tavole del Trattato della Sfera” (1567) e la traduzione della “Prospettiva di Euclide” (1573). Istruì in matematica i figli di Cosimo de’ Medici e di altri gentiluomini fiorentini. Un giorno Egnazio chiese a Giovanni, figlio di Cosimo, la dimostrazione del seguente enunciato:*

*Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo con  $BA < AC$ . Sia  $H$  l’ortocentro di  $ABC$ . Sia  $F$  il punto sul segmento  $AC$  tale che  $BF = BA$ . Sia  $T$  il punto di intersezione tra  $FH$  e il prolungamento di  $BC$ . Sapendo che  $BT = BF$  dimostra che*

- a)  $BCFH$  è ciclico*
- b)  $TCH$  è isoscele*