19 Aprile 2024 – VIII Edizione

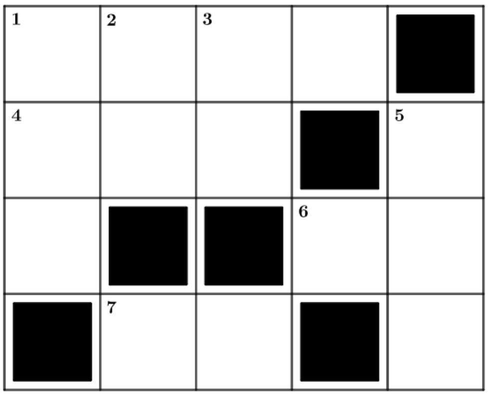
Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

1. CRUCINUMERICO

Egnazio è un appassionato di enigmistica e tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. ***Provate a risolverlo giustificando adeguatamente i risultati ottenuti.***



ORIZZONTALI

1. Il numero di terne (a, b, c) di interi a, b e c dove $a \cdot b \cdot c = 3600$.

4. Il più grande numero della progressione aritmetica formata da 6 termini la cui somma è 990 e che ha il primo termine uguale alla metà dell'ultimo.

6. il numero di coppie (a, b) tali che $2^a - 2^b < 1000$ con $0 \leq b < a$ interi.

7. La somma del primo e dell'ultimo termine di una sequenza di 8 interi non negativi tali che la somma di tre termini consecutivi è 30 e il terzo termine è 5.

VERTICALI

1. Il numero positivo abc tale che la sua rappresentazione in base 9 sia bca (le cifre a, b, c non sono necessariamente distinte).

2. La somma degli esponenti della fattorizzazione in fattori primi della somma di tutti gli m che rendono il rapporto $\frac{13!}{m}$ un quadrato perfetto.

3. Un numero congruo a 0 modulo3, modulo 4 e modulo 5.

5. Il numero di punti di un piano dove si intersecano <u>esattamente due rette</u> appartenenti a un insieme di 50 rette a due a due non parallele in cui solo in 3 punti del piano si incontrano 3 rette dell'insieme, solo in 4 si incontrano 4 rette, …, solo in 7 punti si incontrano 7 rette, in nessun punto si incontrano più di 7 rette.

SOLUZIONI CRUCINUMERICO

1.O $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Supponiamo innanzitutto che a, b, c siano positivi. Contare le terne (a, b, c) tali che $a \cdot b \cdot c = 3600$ equivale a contare i modi in cui è possibile sistemare i quattro "2", i due "3" e i due "5" in tre scatole a, b e c, ovvero:

$$\binom{4+2}{2} = 15 \text{ modi}, \binom{2+2}{2} = 6 \text{ modi}, \binom{2+2}{2} = 6 \text{ modi}$$

In tutto abbiamo quindi $15 \cdot 6 \cdot 6 = 540$ terne (a, b, c) con a, b, c positivi. Essendo a, b, c interi, anche le coppie $(-a, -b, c)$, $(-a, b, -c)$ e $(a, -b, -c)$ verificano la condizione. Il numero di terne è quindi $4 \cdot 540 = 2160$.

4.O Sia a il primo termine della progressione aritmetica e sia d la differenza tra due termini successivi. Si ha

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) + (a + 5d) = 6a + 15d = 990$$

Si ha inoltre che $2a = a + 5d$ da cui si ottiene che $45d = 990$, quindi $d = 22$ e $a = 110$. Il maggior numero della progressione è $110 + 22 \cdot 5 = 220$.

6.O Notiamo che se $b = 10$ allora $2^a - 2^{10} > 1000$ per ogni $a > 10$. Necessariamente $a \leq 10$ e $a > 1$. Se $a = 1$ allora $b = 0$, se $a = 2$ allora $b = 0$ o $b = 1$.iterando il ragionamento per $0 < a < 10$ abbiamo $a - 1$ scelte per b. Se $a = 10$, poiché $2^{10} = 1024$ ho solo 5 scelte per b poiché $2^b > 24$ quindi $5 \leq b \leq 9$. In totale otteniamo quindi $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 5 = 50$ coppie che verificano la relazione.

7.O Indichiamo con A, B, C, D, E, F, G, H gli 8 termini. Sappiamo che $C = 5$ e che $A + B + C = 30$, $B + C + D = 30$, $C + D + E = 30$, $D + E + F = 30$ $E + F + G = 30$ e $F + G + H = 30$. Troviamo che $B = 25 - A$, $D = A$, $E = 25 - A$, $F = 5$, $G = A$ e $H = 25 - A$. Quindi $A + H = A + 25 - A = 25$.

1.V Possiamo scrivere abc nel seguente modo $100a + 10b + c = 81b + 9c + a$ da cui otteniamo che $99a = 71b + 8c$.

Possiamo notare che 99 e 71 sono più grandi rispetto ad 8, si può quindi supporre $a = b$ e c tale da colmare la differenza tra loro. La differenza tra 99 e 71 è 28 che è multiplo di 4. Quindi possiamo moltiplicare per 2 per ottenere che la differenza sia multiplo di 8 e trovare che l'unica soluzione è la terna $(2,2,7)$ quindi il numero cercato è 227.

2.V Essendo $13! = 2^{10}3^5 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, affinché il rapporto $\frac{13!}{m}$ sia un quadrato perfetto, m deve essere divisibile per 7, 11 e 13, per una potenza pari di 2 fino a esponente 10, per una potenza dispari di 3 fino a esponente 5, per una potenza pari di 5 fino a esponente 2. Quindi la somma di tutti gli m è del tipo $(2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10})(3^1 + 3^3 + 3^5)(5^0 + 5^2)(7)(11)(13) = 1365 \cdot 273 \cdot 26 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^4$ da cui la somma degli esponenti è uguale a $1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4 = 12$.

3.V Il numero è divisibile per 3, per 4 e per 5, quindi essendo di due cifre è uguale a 60.

5.V Nell'insieme di rette assegnato vi sono $\binom{50}{2} = 1225$ coppie di rette che si intersecano a due a due da cui dobbiamo togliere le coppie che hanno 3 intersezioni nello stesso punto (avviene solo in 3 punti), quelle che hanno 4 intersezioni nello stesso punto (avviene solo in 4 punti) e così via fino a 7. Le coppie di rette che si intersecano esattamente in tre punti sono $3 \cdot \binom{3}{2} = 9$, le coppie di rette che si intersecano esattamente in quattro punti sono $4 \cdot \binom{4}{2} = 24$, le coppie di rette che si intersecano esattamente in cinque punti sono $5 \cdot \binom{5}{2} = 50$, le coppie di rette che si intersecano esattamente in sei punti sono $6 \cdot \binom{6}{2} = 90$ e le coppie di rette che si intersecano esattamente in sette punti sono $7 \cdot \binom{7}{2} = 147$. Il numero di coppie di rette che si intersecano esattamente in 2 punti sono quindi $1225 - 9 - 24 - 50 - 90 - 147 = 905$ che equivale al numero di punti dove si intersecano esattamente due rette.

2. L'EREDITÀ NASCOSTA

Egnazio Danti lasciò in eredità al nipote Giulio, figlio di Girolamo, le carte di famiglia che aveva gelosamente raccolto, un album di disegni simile a quello tenuto dal Vasari, la sua ricca biblioteca, e probabilmente un commentario di Vitruvio. **Al nipote lasciò indicazioni su dove trovare l'eredità facendo riferimento a un numero da determinare, ovvero il resto della divisione per 19 della somma dei primi 40 termini della successione così costruita:**

- le prime tre cifre sono sempre 120;
- le cifre centrali sono una serie di "3", ed ogni termine della successione ha un 3 in più rispetto al termine precedente;
- le ultime due cifre formano un numero maggiorato di un'unità rispetto al numero formato dalle ultime due cifre del termine precedente;
- il primo termine della successione è $a_1 = 120314$.

A quale numero doveva far riferimento Giulio per accedere alla sua eredità?

Soluzione 2

Il primo termine della successione ammette resto 6 nella divisione per 19 (120314 ≡ 6 mod 19).

Il secondo termine della successione ammette resto 7 nella divisione per 19 (1203315 ≡ 7 mod 19).

In generale, si osserva che la differenza fra due termini consecutivi della successione è pari a

$a_{k-1} - a_{k-2} = 1.083 \cdot 10^{k} + 1 \; con \; k \geq 3.$

Poiché 19 divide 1083 e quindi divide $1083 \cdot 10^{k}$, ne consegue che ogni termine della successione ammette resto maggiore di 1 rispetto al precedente (modulo 19). Allora la somma dei resti dei primi 40 termini è uguale a $\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot (6 + 45) = 1020 \; mod \; 19$, cioè 13.

3. DAL TIRRENO ALL'ADRIATICO

Nel 1574 Egnazio stava lavorando ad un progetto molto ambizioso che avrebbe consentito il collegamento dei mari Tirreno e Adriatico attraverso l'Arno e vari canali con chiuse e laghi artificiali. ***Per la sua realizzazione individuò 5 diverse località geografiche e cercò di progettare, però senza successo, un sistema di navigazione in grado di collegare ciascuna di esse alle altre 4 attraverso canali indipendenti senza punti o tratti in comune. Dimostrare che è effettivamente impossibile effettuare tali collegamenti.***

Soluzione 3

Supponiamo per assurdo di aver tracciato i cinque punti con tutte le connessioni; si tratta di un grafo planare semplice, connesso su 5 vertici, per il quale vale la formula di Eulero.

Il numero di archi del grafo è $\binom{5}{2} = 10$. Applicando la formula di Eulero con $V = 5$ e $S = 10$ si ottiene $5 - 10 + F = 2$ da cui $F = 7$. Ora, dato che ogni faccia del grafo deve essere delimitata da almeno 3 archi e che ogni arco è in comune tra due facce, abbiamo $3 \cdot F \leq S \cdot 2$, ovvero $S \geq \frac{3F}{2} = \frac{21}{2}$ in contraddizione con il valore 10 precedentemente trovato

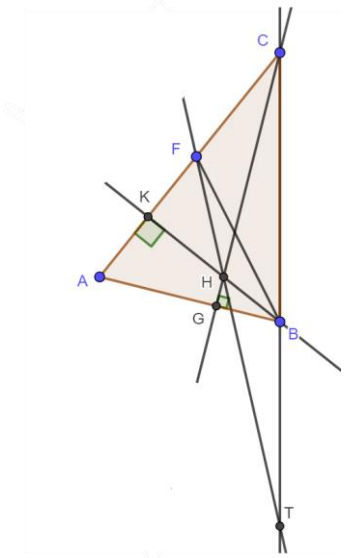
4. EGNAZIO GEOMETRA

Il Danti pubblicò numerose opere di geometria, tra le quali le "Sette tavole del Trattato della Sfera" (1567) e la traduzione della "Prospettiva di Euclide" (1573). Istruì in matematica i figli di Cosimo de' Medici e di altri gentiluomini fiorentini. Un giorno Egnazio chiese a Giovanni, figlio di Cosimo, ***la dimostrazione del seguente enunciato:***

Sia ABC un triangolo acutangolo con BA < AC. Sia H l'ortocentro di ABC. Sia F il punto sul segmento AC tale che BF = BA. Sia T il punto di intersezione tra FH e il prolungamento di BC. Sapendo che BT = BF dimostra che

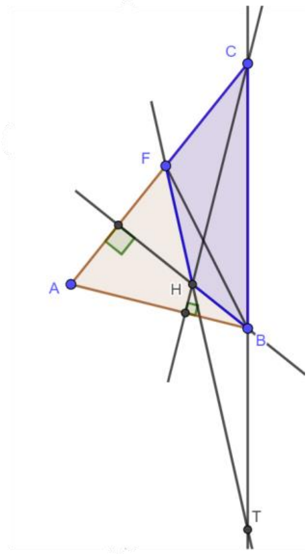
a) BCFH è ciclico
b) TCH è isoscele

Soluzione 4

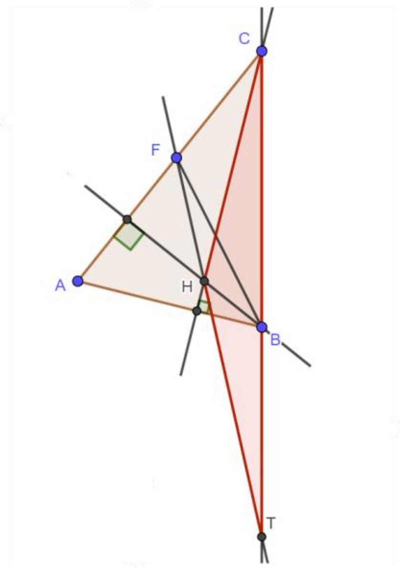


Poiché $FB = AB$ il triangolo AFB è isoscele di base AF, da cui $B\hat{A}F = A\hat{F}B = \alpha$.

Dalla similitudine dei due triangoli rettangoli AGC e KHC si ha anche C$\widehat{H}K = \alpha$



$B\widehat{F}C = B\widehat{H}C$ perché supplementari di angoli congruenti, da cui il poligono BCFH è ciclico



Essendo BCFH ciclico, gli angoli alla circonferenza H$\hat{C}B$= $H\widehat{F}B$ perché insistono sulla stessa corda BH.

Essendo per ipotesi il triangolo FTB isoscele su base FT, si ha che anche il triangolo TCH è isoscele.