

24 Aprile 2024 – VIII Edizione



Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

1. La gara consiste nella risoluzione in 90 minuti di un quesito del valore di 10 punti.
2. La soluzione del quesito richiede una dettagliata argomentazione o dimostrazione.
3. Non è consentito l'utilizzo di dispositivi elettronici (notebook, tablet, cellulari, calcolatrici, ...) e di libri di testo. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno.
4. Durante i primi 15 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
5. Il concorrente non può lasciare l'aula di gara prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 45 minuti dall'inizio.
6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in modo ordinato e leggibile esclusivamente sui fogli consegnati dal commissario. A pena di esclusione, l'elaborato NON dovrà contenere segni che lo rendano riconducibile al candidato o alla scuola. Il nome del candidato e della scuola dovranno essere scritti nel foglio appositamente predisposto che verrà restituito in busta chiusa. Quest'ultima, insieme all'elaborato, sarà a sua volta inserita in una busta che verrà sigillata e consegnata al commissario.
7. Per quanto non indicato si fa riferimento al regolamento.

Per la contestualizzazione dei quesiti ci siamo a volte ispirati a fatti realmente accaduti della vita di Egnazio Danti, adattando comunque le situazioni alla peculiarità di quanto proposto. Quindi, ogni riferimento a fatti e persone è da ritenersi il frutto delle esigenze narrative del testo.

POLIGONI CICLICI

Nel 1562 Egnazio si trasferisce da Perugia a Firenze dove il Gran Duca di Toscana Cosimo I lo invita a partecipare al suo grande progetto cartografico, il “Guardaroba di Palazzo Vecchio”. Per dodici anni compie un lavoro notevole, dipingendo più di trenta carte geografiche delle regioni del mondo, ispirandosi ai disegni di Giacomo Gastaldi, Abraham Ortelius, Gerardus Mercator.

In onore delle sue abilità geometriche spese per la cartografia e la corografia proponiamo il problema che segue.

Sia A, B, C un triangolo e siano A_1, B_1, C_1 punti interni ai lati BC, CA e AB rispettivamente.

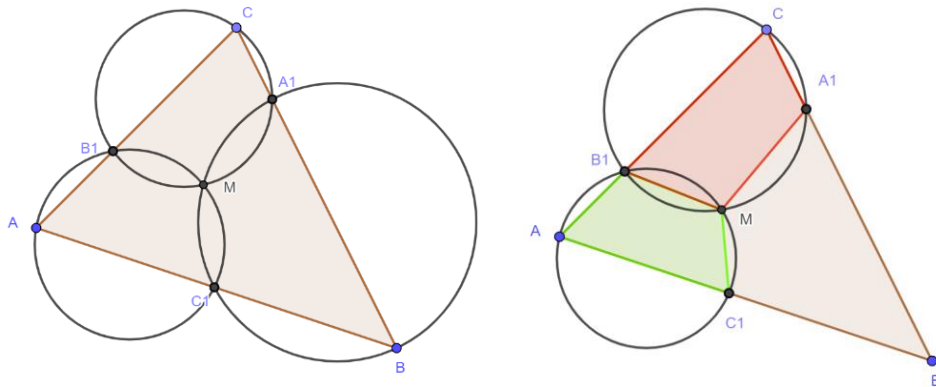
- a) **Provare che le circonferenze passanti per i punti A, B_1, C_1 , per i punti B, A_1, C_1 , e per i punti C, A_1, B_1 hanno almeno un punto in comune M .**
- b) **Supponiamo ora che $\overline{AC_1} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{BA_1} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, $\overline{CB_1} = \frac{1}{3}\overline{CA}$. Consideriamo il triangolo XYZ ottenuto dall'intersezione dei segmenti AA_1, BB_1, CC_1 con $X=AA_1 \cap BB_1$, $Y=BB_1 \cap CC_1$, $Z=CC_1 \cap AA_1$. Dimostrare che $\mathcal{A}(XYZ) = \frac{1}{7}\mathcal{A}(ABC)$.**
- c) **Provare che un quadrilatero convesso è sezionabile¹ in n quadrilateri ciclici con $n \geq 6$**

¹ “Sezionare” un poligono equivale a ricoprirlo con un numero finito di poligoni non aventi a due a due punti interni in comune.

Dimostrazione

Punto a) Poniamo l'attenzione su due delle tre circonferenze tracciabili, ad esempio quelle che si intersecano in B_1 , ovvero circonferenza per AB_1C_1 e circonferenza per CA_1B_1 . Sia M l'ulteriore punto di intersezione; esso può essere interno al triangolo ABC (**v. Caso1**), esterno al triangolo ABC (**v. Caso2**), oppure coincidente con B_1 (**v. Caso3**).

Caso1: il punto di intersezione M è interno al triangolo.



Essendo i quadrilateri AC_1MB_1 e CB_1MA_1 ciclici, si ha $\hat{A} + B_1\hat{M}C_1 = 180^\circ$ e $\hat{C} + A_1\hat{M}B_1 = 180^\circ$

Inoltre $B_1\hat{M}C_1 + C_1\hat{M}A_1 + A_1\hat{M}B_1 = 360^\circ$

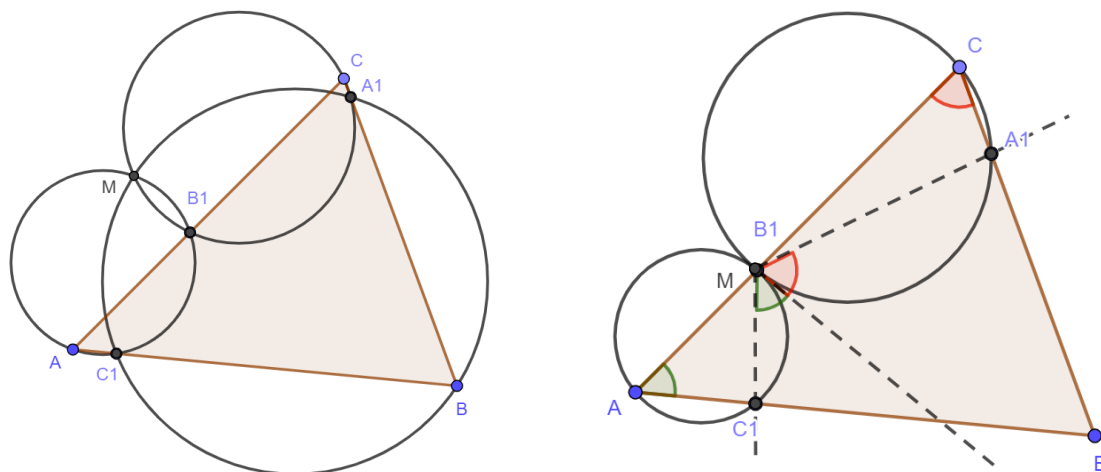
Quindi $\hat{A} + B_1\hat{M}C_1 + \hat{C} + A_1\hat{M}B_1 = B_1\hat{M}C_1 + C_1\hat{M}A_1 + A_1\hat{M}B_1$

Da cui $\hat{A} + \hat{C} = C_1\hat{M}A_1$

Ma anche $\hat{A} + \hat{C} + \hat{B} = C_1\hat{M}A_1 + \hat{B} = 180^\circ$

Ovvero il quadrilatero C_1BA_1M è ciclico quindi anche la terza circonferenza passa per M .

Caso2: il punto di intersezione M è esterno al triangolo



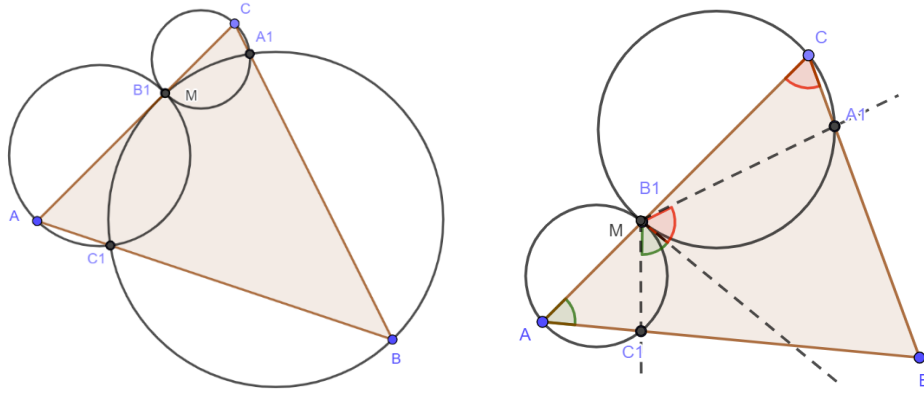
Si ha $C_1\hat{M}A_1 = C_1\hat{M}B_1 + B_1\hat{M}A_1$

$C_1\hat{M}B_1 = \hat{A}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco C_1B_1

$B_1\hat{M}A_1 = \hat{C}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco B_1A_1

Quindi $C_1\hat{M}A_1 + \hat{B} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ovvero C_1BA_1M è quadrilatero ciclico, da cui anche la terza circonferenza passa per M

Caso3: $M \equiv B_1$



Si procede analogamente al Caso2 considerando la tangente alle prime due circonferenze in $M \equiv B_1$.

Punto b) Collegando i punti come in figura si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABC) &= \mathcal{A}(ABA_1) + \mathcal{A}(BCB_1) + \mathcal{A}(CAC_1) + \mathcal{A}(XYZ) - \mathcal{A}(AC_1Z) - \mathcal{A}(BA_1X) - \mathcal{A}(CB_1Y) = \\ &= \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC) + \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC) + \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(XYZ) - \mathcal{A}(AC_1Z) - \mathcal{A}(BA_1X) - \mathcal{A}(CB_1Y) \end{aligned}$$

Da cui

$$\mathcal{A}(XYZ) = \mathcal{A}(AC_1Z) + \mathcal{A}(BA_1X) + \mathcal{A}(CB_1Y)$$

Determiniamo $\mathcal{A}(AC_1Z)$.

Consideriamo la retta per $A_1 \parallel AB$ e sia E l'intersezione di tale retta con CC_1 . I triangoli AC_1Z e ZA_1E sono simili, calcoliamo il rapporto di similitudine:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{A_1E}} = \frac{\frac{1}{3}\overline{AB}}{\frac{1}{3}\overline{A_1F}} = \frac{\frac{1}{3}\overline{AB}}{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\overline{AB}\right)} = \frac{3}{4}$$

Sia ora

h_1 la misura dell'altezza del triangolo AC_1Z relativa alla base AC_1 ,
 h_2 la misura dell'altezza del triangolo A_1EZ relativa alla base EA_1 ,
 $h_3 = h_1 + h_2$ la misura dell'altezza di ABA_1 rispetto alla base AB .

Quindi

$h_3 = \frac{1}{3}h$ dove h è la misura dell'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB ,

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}$ da cui $h_1 = \frac{1}{7}h$,

$$\mathcal{A}(AC_1Z) = \frac{\overline{AC_1} \cdot h_1}{2} = \frac{1}{21}\mathcal{A}(ABC).$$

Analogamente $\mathcal{A}(BA_1X) = \mathcal{A}(CB_1Y) = \frac{1}{21}\mathcal{A}(ABC)$.

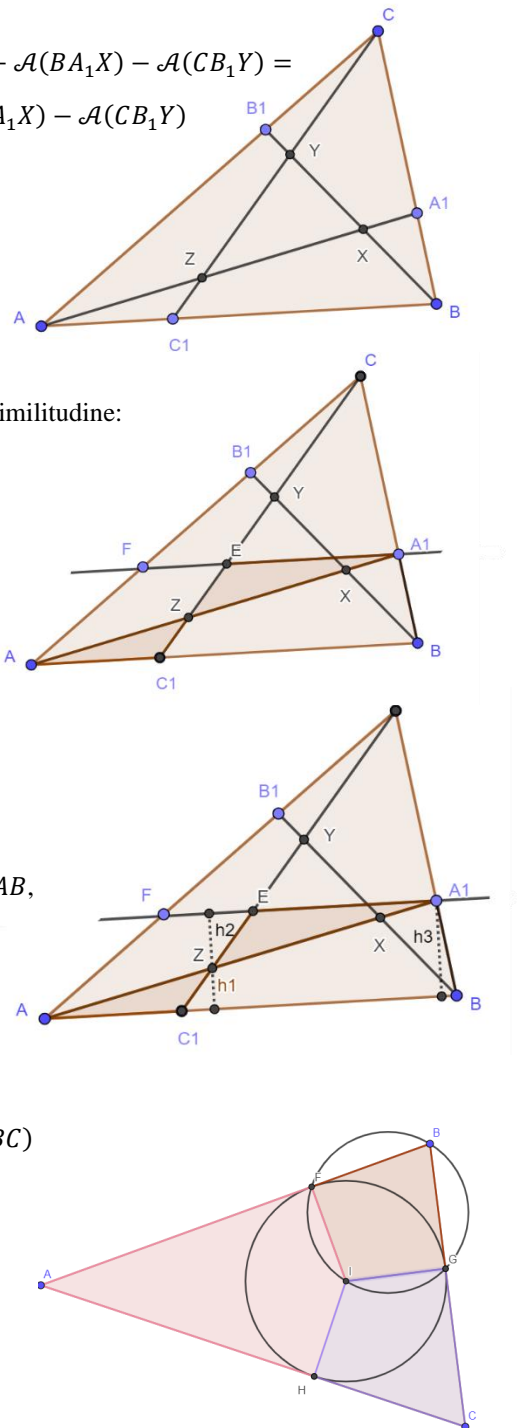
Infine

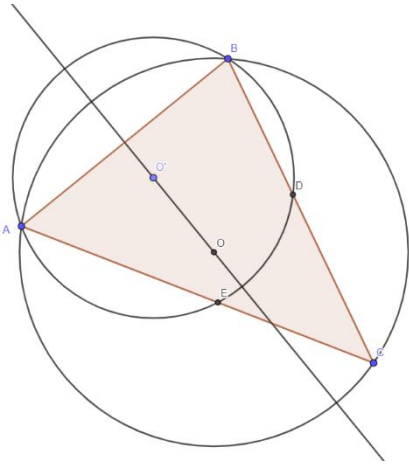
$$\mathcal{A}(XYZ) = \mathcal{A}(AC_1Z) + \mathcal{A}(BA_1X) + \mathcal{A}(CB_1Y) = \frac{3}{21}\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{7}\mathcal{A}(ABC)$$

Punto c) In ogni triangolo assumiamo che \hat{C} sia un angolo acuto

Più avanti ci serviranno i seguenti risultati:

1. Ogni triangolo ABC si può sezionare in tre quadrilateri ciclici
 Basta considerare il suo incentro come in figura





2. Ogni triangolo ABC si può sezionare in un quadrilatero ciclico ed un triangolo.

Consideriamo il circocentro O di ABC e si fissi sull'asse di AB un punto O' tale che la distanza tra O' e AB sia minore della distanza di O da AB . Il punto C risulta esterno alla circonferenza di centro O' e passante per A e B ; quindi, tale circonferenza interseca AC e BC in punti E, D interni ai due segmenti. Quindi il triangolo ABC è sezionato nel quadrilatero $AEDB$ ciclico e il triangolo ECD .

Consideriamo ora un quadrilatero $ABCD$ e dimostriamo che $\forall n \geq 6$ esso può essere sezionato in n quadrilateri ciclici. Innanzitutto dividiamo il quadrilatero in due triangoli attraverso una sua diagonale. Indichiamo con T_0 l'altro triangolo. D'ora in poi, ogni lettera esprimerà un numero intero positivo.

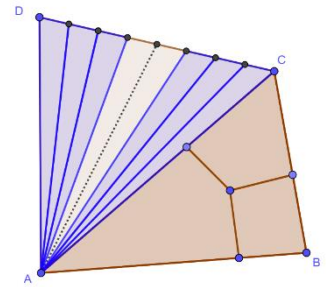
Sezioniamo uno dei due triangoli in tre quadrilateri ciclici come in 1. Allora dobbiamo dimostrare che il numero di quadrilateri ciclici è $n = 3 + k$ con $k \geq 3$.

Essendo $k \geq 3$ possiamo dividere k per 3 ottenendo $k = 3q + r$ con $q > 0$ ed $r = 0,1,2$, da cui

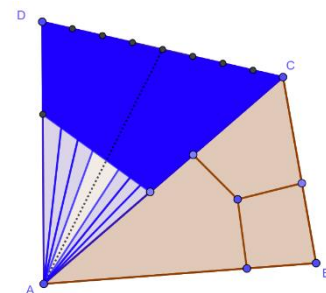
$$n = 3 + 3q + r \text{ con } q > 0 \text{ e } r = 0,1,2.$$

Se $r = 0$ allora k è divisibile per 3, sezioniamo il triangolo T_0 in q triangoli - scegliendo $q - 1$ punti distinti su un suo lato e unendo ciascuno di essi al vertice opposto - e ciascuno dei q triangoli in tre quadrilateri ciclici come in 1.

Otteniamo così in totale $n = 3 + 3q$ quadrilateri ciclici.



Se $r = 1$ allora sezioniamo il triangolo T_0 in un quadrilatero ciclico e un triangolo T_1 come in 2. e sezioniamo T_1 in $3q$ triangoli, ottenendo così $n = 3 + 3q + 1$ quadrilateri ciclici.



Se $r = 2$ allora sezioniamo il triangolo T_1 in un quadrilatero ciclico e un triangolo T_2 come in 2. e sezioniamo T_2 in $3q$ triangoli, ottenendo così $n = 3 + 3q + 2$ quadrilateri ciclici.

Da cui la tesi.

