20 Aprile 2023 – VII Edizione



Gara di Matematica Premio Danti

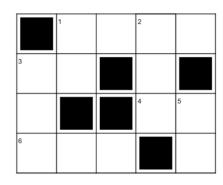
Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

- 1. La gara consiste nella risoluzione in 120 minuti di quattro quesiti assegnati del valore di 10 punti ciascuno.
- 2. La soluzione di ciascun quesito richiede una dettagliata argomentazione o dimostrazione.
- 3. È consentito l'utilizzo di qualsiasi strumento (righello, compasso, software,...) ma è assolutamente vietata, pena l'esclusione, la comunicazione con esterni alla squadra.
- 4. Durante i primi 30 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
- 5. I componenti della squadra non possono lasciare l'aula di gara prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 90 minuti dall'inizio.
- 6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in modo ordinato e leggibile esclusivamente sui fogli consegnati dal commissario. A pena di esclusione, l'elaborato NON dovrà contenere segni che lo rendano riconducibile alla squadra o alla scuola. Il nome del capitano e della scuola dovranno essere scritti nel foglio appositamente predisposto che verrà restituito in busta chiusa. Quest'ultima, insieme all'elaborato, sarà a sua volta inserita in una busta che verrà sigillata e consegnata al commissario.
- 7. Per quanto non indicato si fa riferimento al regolamento.

1. CRUCINUMERICO

Ignazio è un appassionato di enigmistica e tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. Provate a risolverlo giustificando adeguatamente i risultati ottenuti e sapendo che x e y sono multipli rispettivamente di 3 e 7.



ORIZZONTALI

- 1. Il 2023-esimo termine della progressione aritmetica che ha come primi quattro termini p, 9, 3p - q, e 3p + q
- **3.** Il numero naturale tale che $(n + 1)! + (n + 2)! = 1088 \cdot n!$
- **4.** *y*
- 6. Il prodotto 6m dove m è il numero di medaglie che vengono assegnate nel corso di un torneo della durata di 6 giorni, sapendo che, se m_k è il numero di medaglie ancora non assegnate all'inizio del giorno k, allora:

$$\mathbf{a}) m_1 = m$$

b)
$$m_{k+1} = \frac{6}{7} (m_k - k)$$
 se $1 \le k \le 5$

c)
$$m_6 = 6$$

VERTICALI

- 1. *x*
- 2. Il numero palindromo di tre cifre che, se aumentato di 32, è un palindromo di quattro cifre
- 2. Il numero pannaronio ai $N = 9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + 9999 +$
- **5.** il numero di valori interi *n* per i quali $800000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$ è un intero

2. ENNUPLE MAGICHE

Nel 1562 Ignazio si trasferisce da Perugia al monastero domenicano di San Marco a Firenze e comincia ad insegnare matematica e scienze ai figli delle più potenti famiglie fiorentine. Viene presto notato dal Gran Duca di Toscana che lo invita a risolvere un problema da tempo nei suoi pensieri: esiste un poligono di n lati tale che la somma dei quadrati dei lati è uguale al quadrato del suo perimetro, la somma dei cubi dei lati è uguale al cubo del suo perimetro, e così via fino alla potenza n? Ignazio risponde immediatamente che tale poligono non esiste, ma aggiunge che, generalizzando il problema in \mathbb{R} , esiste invece più di una soluzione. In notazione moderna il problema diventa:

Trovare tutte le soluzioni reali $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ del sistema:

3. DIVISIBILITÀ A FIRENZE

Durante il suo soggiorno a Firenze (1567), Ignazio Danti ricoprì la cattedra di matematica presso lo Studio Fiorentino, l'università intesa come Studium Generale a cui facevano riferimento numerosi studiosi e visitatori provenienti anche da fuori città. Un giorno uno studente gli chiese sotto quali condizioni il numero $3^n + 1 con n \in \mathbb{N}^+$ non risultasse mai divisibile per $3^m - 1 con m \in \mathbb{N}^+$.

Egli rispose che se m > n il quesito risultava banale perché $3^m - 1 > 3^n + 1$ in \mathbb{N}^+ e che se m = 1 allora $3^n + 1$, certamente pari $\forall n \in \mathbb{N}^+$, è sempre divisibile per $3^1 - 1 = 2$. Dopo queste riflessioni dimostrò infine che

 $3^n + 1$ non è divisibile per $3^m - 1$ se $1 < m \le n$ con $m, n \in \mathbb{N}^+$. Sapreste dimostrarlo anche voi?

4. ANEMOSCOPIO GEOMETRICO

Ignazio costruì numerosi anemoscopi verticali a Firenze, Bologna e perfino a Perugia dove si trovò nell'estate del 1577 a un anno dalla morte del fratello Vincenzo. Non mancò nei suoi progetti un anemoscopio molto originale la cui sezione verticale è ottenuta dalla costruzione che segue.

Si tracci una circonferenza γ e una sua corda AB. Sia R su AB tale che AR = 2RB, sia DE la corda passante per R perpendicolare ad AB, sia P l'ortocentro del triangolo ADE e sia M il punto medio di PR. Indicato con F un punto sull'arco AD non contenente B, si considerino le corde DC e FG passanti per M.

Si ottiene così il poligono intrecciato CDGF che costituisce il profilo dell'anemoscopio.

Chiamati $\{S\} = FC \cap AB$ e $\{T\} = DG \cap AB$, si dimostra che M è punto medio di ST e che è quindi possibile applicare nei punti S e T dei tiranti equidistanti da M utili al fissaggio dell'anemoscopio.

Come dimostrare che M è punto medio di ST?