

20 Aprile 2023 – VII Edizione



Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

1. La gara consiste nella risoluzione in 120 minuti di quattro quesiti assegnati del valore di 10 punti ciascuno.
2. La soluzione di ciascun quesito richiede una dettagliata **argomentazione** o **dimostrazione**.
3. È consentito l'utilizzo di qualsiasi strumento (righello, compasso, software,...) ma è **assolutamente vietata, pena l'esclusione, la comunicazione con esterni alla squadra**.
4. Durante i primi 30 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
5. I componenti della squadra non possono lasciare l'aula di gara prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 90 minuti dall'inizio.
6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in modo ordinato e leggibile esclusivamente sui fogli consegnati dal commissario. A pena di esclusione, l'elaborato NON dovrà contenere segni che lo rendano riconducibile alla squadra o alla scuola. Il nome del capitano e della scuola dovranno essere scritti nel foglio appositamente predisposto che verrà restituito in busta chiusa. Quest'ultima, insieme all'elaborato, sarà a sua volta inserita in una busta che verrà sigillata e consegnata al commissario.
7. Per quanto non indicato si fa riferimento al regolamento.

1. CRUCINUMERICO

Ignazio è un appassionato di enigmistica e tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. *Provate a risolverlo giustificando adeguatamente i risultati ottenuti e sapendo che x e y sono multipli rispettivamente di 3 e 7.*

	1		2	
3				
			4	5
6				

ORIZZONTALI

1. Il 2023-esimo termine della progressione aritmetica che ha come primi quattro termini $p, 9, 3p - q, e 3p + q$
3. Il numero naturale tale che $(n + 1)! + (n + 2)! = 1088 \cdot n!$
4. y
6. Il prodotto $6m$ dove m è il numero di medaglie che vengono assegnate nel corso di un torneo della durata di 6 giorni, sapendo che, se m_k è il numero di medaglie ancora non assegnate all'inizio del giorno k , allora:

a) $m_1 = m$

b) $m_{k+1} = \frac{6}{7}(m_k - k)$ se $1 \leq k \leq 5$

c) $m_6 = 6$

VERTICALI

1. x
2. Il numero palindromo di tre cifre che, se aumentato di 32, è un palindromo di quattro cifre
3. La somma delle cifre di $N = 9 + 99 + 999 + 9999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{321 \text{ cifre}}$
5. il numero di valori interi n per i quali $800000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$ è un intero

3. DIVISIBILITÀ A FIRENZE

Durante il suo soggiorno a Firenze (1567), Ignazio Danti ricoprì la cattedra di matematica presso lo Studio Fiorentino, l'università intesa come Studium Generale a cui facevano riferimento numerosi studiosi e visitatori provenienti anche da fuori città. Un giorno uno studente gli chiese sotto quali condizioni il numero $3^n + 1$ con $n \in \mathbb{N}^+$ non risultasse mai divisibile per $3^m - 1$ con $m \in \mathbb{N}^+$.

Egli rispose che se $m > n$ il quesito risultava banale perché $3^m - 1 > 3^n + 1$ in \mathbb{N}^+ e che se $m = 1$ allora $3^n + 1$, certamente pari $\forall n \in \mathbb{N}^+$, è sempre divisibile per $3^1 - 1 = 2$.

Dopo queste riflessioni dimostrò infine che

$3^n + 1$ non è divisibile per $3^m - 1$ se $1 < m \leq n$ con $m, n \in \mathbb{N}^+$.

Sapreste dimostrarlo anche voi?

4. ANEMOSCOPIO GEOMETRICO

Ignazio costruì numerosi anemoscopi verticali a Firenze, Bologna e perfino a Perugia dove si trovò nell'estate del 1577 a un anno dalla morte del fratello Vincenzo. Non mancò nei suoi progetti un anemoscopio molto originale la cui sezione verticale è ottenuta dalla costruzione che segue.

Si tracci una circonferenza γ e una sua corda AB . Sia R su AB tale che $AR = 2RB$, sia DE la corda passante per R perpendicolare ad AB , sia P l'ortocentro del triangolo ADE e sia M il punto medio di PR . Indicato con F un punto sull'arco AD non contenente B , si considerino le corde DC e FG passanti per M .

Si ottiene così il poligono intrecciato $CDGF$ che costituisce il profilo dell'anemoscopio.

Chiamati $\{S\} = FC \cap AB$ e $\{T\} = DG \cap AB$, si dimostra che M è punto medio di ST e che è quindi possibile applicare nei punti S e T dei tiranti equidistanti da M utili al fissaggio dell'anemoscopio.

Come dimostrare che M è punto medio di ST ?