21 Aprile 2023 – VII Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

PREMIO DANTI

1. La gara consiste nella risoluzione in 90 minuti di un quesito del valore di 10 punti.
2. La soluzione del quesito richiede una dettagliata argomentazione o dimostrazione.
3. Non è consentito l'utilizzo di dispositivi elettronici (notebook, tablet, cellulari, calcolatrici, …) e di libri di testo. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno
4. Durante i primi 15 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
5. Il concorrente non può lasciare l'aula di gara prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 45 minuti dall'inizio.
6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in modo ordinato e leggibile esclusivamente sui fogli consegnati dal commissario. A pena di esclusione, l'elaborato NON dovrà contenere segni che lo rendano riconducibile al candidato o alla scuola. Il nome del candidato e della scuola dovranno essere scritti nel foglio appositamente predisposto che verrà restituito in busta chiusa. Quest'ultima, insieme all'elaborato, sarà a sua volta inserita in una busta che verrà sigillata e consegnata al commissario.
7. Per quanto non indicato si fa riferimento al regolamento.

Per la contestualizzazione dei quesiti ci siamo a volte ispirati a fatti realmente accaduti della vita di Egnazio Danti, adattando comunque le situazioni alla peculiarità di quanto proposto. Quindi, ogni riferimento a fatti e persone è da ritenersi il frutto delle esigenze narrative del testo.

EGNAZIO CARTOGRAFO

La "Galleria delle carte geografiche" è situata nei Palazzi Vaticani lungo l'itinerario che conduce alla Cappella Sistina; è un'eccezionale rappresentazione cartografica delle regioni d'Italia, realizzata sotto la direzione di Ignazio Danti tra il 1580 e il 1585 su ordine di Papa Gregorio XIII. Nel corso della sua realizzazione, il grande Ignazio si divertiva a proporre degli indovinelli ai suoi collaboratori, come ad esempio i seguenti:

Indichiamo con X l'insieme finito delle $N > 2$ località di una cartina disposte non tutte allineate.

1. Provare che si può tracciare una circonferenza passante per 3 di queste località che non contiene al suo interno altre località di X.

2. Provare che si può tracciare una circonferenza che contiene esattamente k località di X al suo interno e $N - k$ località al suo esterno, per ogni $0 < k \leq N$.

3. Sia ora X costituito da N località, dove $N = 2n + 1$ con $n > 2$, mai 3 allineate e mai 4 disposte su una stessa circonferenza. Se per ogni coppia di località di X si può tracciare un numero dispari di circonferenze che passano per esattamente 3 località di X e che racchiudono al loro interno altre $n - 1$ località di X, provare che il numero totale di queste circonferenze è pari se e solo se n è pari.

Dimostrazione

1. Siano $A, B \in X$ due località in X aventi distanza minima. A e B esistono perchè l'insieme è finito e sia $C \neq A, B$ in X non allineato con A, B e che massimizza l'angolo $\widehat{ACB}$. Si consideri la circonferenza che passa per A, B, C. Questa circonferenza non contiene al suo interno alcun elemento di X perchè se $D \in$ è interno alla circonferenza allora D non appartiene alla corda AB per la minimalità della distanza tra A eB e inoltre se si considera la retta AD e la sua intersezione D' con la circonferenza si ha che l'angolo $\widehat{ACB} = \widehat{AD'B}$ e quindi l'angolo $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$ contro la massimalità.

2. Si considerino gli assi dei segmenti PQ al variare di P e Q in X. Siccome sono in numero finito esiste un punto P non appartenente a nessuno di questi assi e quindi se $X = \{P_1, \ldots, P_{2n+1}\}$ allora $d_i = \bar{P}P_i \neq d_j = \bar{P}P_j$ per $i \neq j$. A meno di riordinare supponiamo che $d_1 < d_2 < \cdots < d_{2n+1}$. Se consideriamo la circonferenza di centro p e raggio $\frac{d_k + d_{k+1}}{2}$ è facile vedere che contiene al suo interno esattamente k elementi di X e al suo esterno $N - k$ elementi di X.

3. Le coppie non ordinate di località distinte di X sono $n(2n + 1)$. Osserviamo che il numero totale di circonferenze è dato dalla somma di $n(2n + 1)$ numeri dispari diviso 3 e dividere per 3 non cambia la parità. Quindi se la somma è pari vuol dire che $n(2n + 1)$ è pari e quindi n è pari. Viceversa se n è pari la somma di $n(2n + 1)$ numeri dispari è pari e quindi anche diviso 3 è pari.