

21 Aprile 2022 – VI Edizione



Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

1. La gara consiste nella risoluzione nel tempo di gara (120 minuti) di quattro quesiti assegnati del valore di 8 punti ciascuno.
2. La soluzione di ciascun quesito richiede una dettagliata argomentazione o dimostrazione.
3. È consentito l'utilizzo di qualsiasi strumento (righello, compasso, software,...) ma è **assolutamente vietata, pena l'esclusione, la comunicazione con esterni alla squadra.**
4. Durante i primi 30 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
5. Non è consentito a nessuno dei componenti la squadra di lasciare la stanza virtuale prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 90 minuti dall'inizio.
6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in modo ordinato, trasformata in un **unico** file pdf (che risulti leggibile) e salvato con il nome della scuola e dello studente referente. Tale file deve essere caricato sulla piattaforma UniStudium nell'apposita sezione.
7. Al termine della correzione verrà stilata una graduatoria sulla base del punteggio ottenuto e tenendo conto che, tra le prime tre squadre classificate, non possono essere presenti due squadre della stessa scuola. Ai fini della classifica delle prime tre, a parità di punteggio sopravanza la squadra con il numero maggiore di studenti del terzo anno presenti nella stessa e, ad ulteriore parità, la squadra con il concorrente più giovane.

Per la contestualizzazione dei quesiti ci siamo a volte ispirati a fatti realmente accaduti della vita di Egnazio Danti, adattando comunque le situazioni alla peculiarità di quanto proposto. Quindi, ogni riferimento a fatti e persone è da ritenersi il frutto delle esigenze narrative del testo.

1. CRUCINUMERICO

Egnazio è un appassionato di enigmistica, i suoi tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. Provate anche voi giustificando adeguatamente i risultati ottenuti e sapendo che x è un numero divisibile per 7.

1			2	3
		4		
5				
			6	

ORIZZONTALI

1. La somma delle cifre del più grande divisore primo di 16383 sapendo che $16384 = 2^{14}$

2. Il numero di coppie $(a; b)$ con a e b interi positivi che verificano l'uguaglianza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2022}$

4. x

5. Il più piccolo valore di M dove M è il più grande valore tra le somme $a + b, b + c, c + d, d + e$, con a, b, c ed e interi positivi e $a + b + c + d + e = 2022$

6. Il numero di cifre del più piccolo intero positivo n tale che n sia divisibile per 20, n^2 sia un cubo e n^3 sia un quadrato

VERTICALI

1. La somma di tutti i numeri naturali $0 < n < 100$ tali che n non divide $(n - 1)!$

2. Il prodotto tra il resto di 7^a nella divisione per 48 e il resto di 3^b nella divisione per 8 con a e b interi positivi dispari.

3. Il numero di numeri palindromi compresi tra 1000 e 10000 che non sono divisibili per 7

4. Il valore di x sapendo che la media dei numeri $1, 2, \dots, 99$ e x è $10x$. (Se il risultato è frazionario esprimerlo come somma di numeratore e denominatore)

2. NUMERI MAGICI

Egnazio, da ragazzo, imparò i rudimenti della pittura e dell'architettura da suo padre e sua zia, ma la matematica e la scienza erano i suoi studi preferiti. Era affascinato dalle relazioni che rendevano i numeri come magici. Ad esempio, una volta intuì che:

“dati tre numeri reali positivi a , b , c e un numero intero positivo k con

- $a \neq b \neq c$*
- $a^{k+1} = ac - 1$*
- $b^{k+1} = bc - 1$*

allora $k^2(ab)^{k+1} < 1$ ”

egli utilizzò tale risultato per standardizzare alcune misure.

Si dimostri l'asserto nel caso $k=2021$.

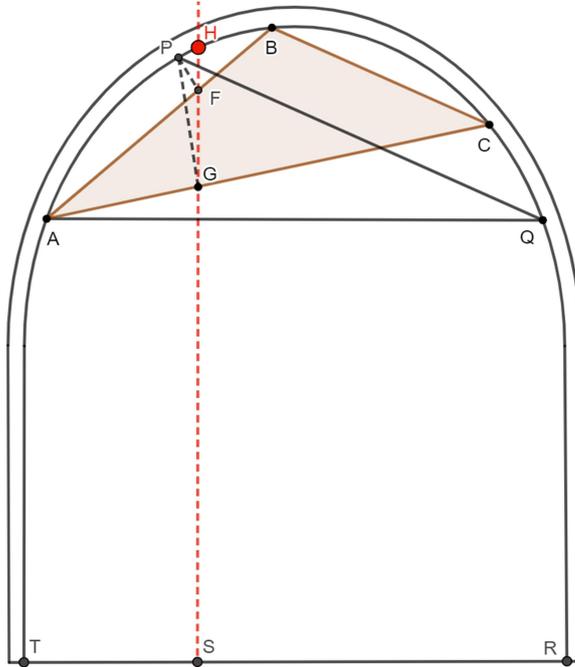
3. LA COMMISSIONE DEL CALENDARIO GIULIANO

Nel 1582 Papa Gregorio XIII, per riformare il calendario giuliano, nomina una commissione per discutere la proposta di riforma elaborata da Luigi Lilio. I membri della commissione, di cui fanno parte Egnazio, Vincenzo di Lauro di Tropea, vescovo di Mondovì, Cristoforo Clavio, gesuita tedesco, Pedro Chacón, teologo spagnolo, Ignazio Nehemet, patriarca di Antiochia di Siria, decidono di scambiarsi dei pareri per corrispondenza. Ogni due membri della commissione si scrivono al massimo una lettera e, se si escludono due di essi, le lettere scambiate sono 3^m , dove m è intero positivo.

- a) Provare che ogni membro scrive almeno una lettera.*
- b) Determinare il numero di membri della commissione.*

4. LA MERIDIANA DI EGNAZIO

Nel 1576 Egnazio si occupò della costruzione di una meridiana nella Basilica di San Petronio a Bologna. La meridiana prendeva luce da un foro praticato nel punto estremo del muro che chiudeva la navata sinistra. La posizione H del foro era stata calcolata disegnando sulla parete la seguente costruzione:



Arco AQ : arco di circonferenza

Rette $AQ \parallel TR$

Rette $QP \parallel BC$

Rette $PF \perp AB$ e $PG \perp AC$

Dimostrare che, quando il raggio luminoso uscente da H passa per i punti F e G , allora percorre la minima distanza dal suolo.