



17 maggio 2021 – V Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

1. La gara consiste nella risoluzione nel tempo di gara (120 minuti) di quattro quesiti assegnati del valore di 8 punti ciascuno.
2. La soluzione di ciascun quesito richiede una dettagliata argomentazione o dimostrazione.
3. È consentito l'utilizzo di qualsiasi strumento (righello, compasso, software,...) ma è **assolutamente vietata, pena l'esclusione, la comunicazione con esterni alla squadra.**
4. Durante i primi 30 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
5. Non è consentito a nessuno dei componenti la squadra di lasciare la stanza virtuale prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 90 minuti dall'inizio.
6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in modo ordinato, trasformata in un **unico** file pdf (che risulti leggibile) e salvato con il nome della scuola e dello studente referente. Tale file deve essere caricato sulla piattaforma UniStudium nell'apposita sezione.
7. Al termine della correzione verrà stilata una graduatoria sulla base del punteggio ottenuto e tenendo conto che, tra le prime tre squadre classificate, non possono essere presenti due squadre della stessa scuola. Ai fini della classifica delle prime tre, a parità di punteggio sopravanza la squadra con il numero maggiore di studenti del terzo anno presenti nella stessa e, ad ulteriore parità, la squadra con il concorrente più giovane.

1. CRUCINUMERICO

Egnazio è un appassionato di enigmistica, i suoi tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. Per complicare un po' le cose hanno aggiunto le incognite x e y nelle definizioni. Aiutalo a risolverlo sapendo che x e y sono rispettivamente divisibili per 9 e 27.

1		2		
3	4			5
	6			

ORIZZONTALI

1. Quanti sono i numeri positivi minori o uguali di 2021 che non hanno cifre ripetute?

3. Il più piccolo numero positivo che diviso per 11 dà resto 9 e che diviso per 13 dà resto 2

6. Il più grande numero positivo che è prodotto di due numeri tale che uno è palindromo mentre l'altro è potenza quarta; il resto della divisione di 2021 per uno di questi due numeri è uguale a 356 mentre il resto della divisione di 2021 per l'altro numero è uguale a 5

VERTICALI

1 Il divisore maggiore di 1 comune a tutti i numeri del tipo $abab$ con $1 \leq a \leq 9$ e $1 \leq b \leq 9$

2. y

4. x

5. Il numero di quaterne (n, a, b, c) con $n > 0$ e $a, b, c \geq 0$ tali che $n^a + n^b = n^c$ con $n^c < 2021$

2. CALENDARI POLINOMIALI

Papa Gregorio XIII incaricò Egnazio e altri matematici di riformare il calendario. Tra i vari calcoli, dovette trovare un polinomio a coefficienti reali $P(x)$ che doveva soddisfare la seguente uguaglianza

$$P(x^2) = x^{2021}(x + 1)P(x)$$

e tale che $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-1847}$. Sapresti trovarlo anche tu?

3. IL SOGNO DI EGNAZIO

Egnazio fa un sogno in cui si trova proiettato in un piano P con un numero finito di punti. All'inizio del sogno è spaventato: deve stare attento a dove mettere i piedi! Poi si guarda intorno e nota che, oltre ai punti, ci sono sottoinsiemi lungo i quali si può muovere: rette che contengono ciascuna $q + 1$ punti, con $q \geq 2$. Le conta e ce ne sono esattamente $q^2 + q + 1$ in tutto. Gli piace spostarsi lungo le rette perché si orienta meglio; andando avanti e indietro, infatti, osserva che:

- 1. in ogni punto ci passano $q + 1$ rette distinte*
- 2. ogni retta ne interseca un'altra diversa da se stessa in un solo punto*

Improvvisamente la sua attenzione è attratta da un particolare insieme di punti A che contiene esattamente k punti con $k \geq 1$. Inizia a contare le rette che non lo intersecano che sono un numero l_0 , le rette che lo intersecano in un solo punto e sono l_1 e così via..., le rette che lo intersecano esattamente in i punti sono l_i . Alla fine si accorge che

$$\sum_{i=0}^{q+1} l_i = q^2 + q + 1 \quad e \quad \sum_{i=0}^{q+1} i l_i = k(q + 1)$$

Purtroppo al risveglio non ricorda come abbia ottenuto queste due uguaglianze. Può contare sul vostro aiuto?

4. PIASTRELLE TRIANGOLARI

Egnazio convince la famiglia Danti a ristrutturare la loro dimora abituale nel centro di Perugia e in particolare a dotarla di nuovi pavimenti. Per la sala dove egli è solito ritirarsi a studiare vuole essere coinvolto nella progettazione insieme ai maestri artigiani. Ha in mente una piastrella a forma di triangolo con vertici A , B e C in cui considera i punti medi dei lati e il triangolo $A'B'C'$ avente essi come vertici. A questo punto dà indicazione ai maestri di provvedere alla realizzazione di alcune bozze usando vari tipi di triangoli. Tra le tante sceglie una piastrella in cui l'incentro di ABC e di $A'B'C'$ coincidono. Che forma particolare ha tale piastrella e perché? È possibile che tra le piastrelle ce ne sia una in cui l'incentro del triangolo ABC non coincida con alcun punto notevole di $A'B'C'$?