27 febbraio 2019 – III Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

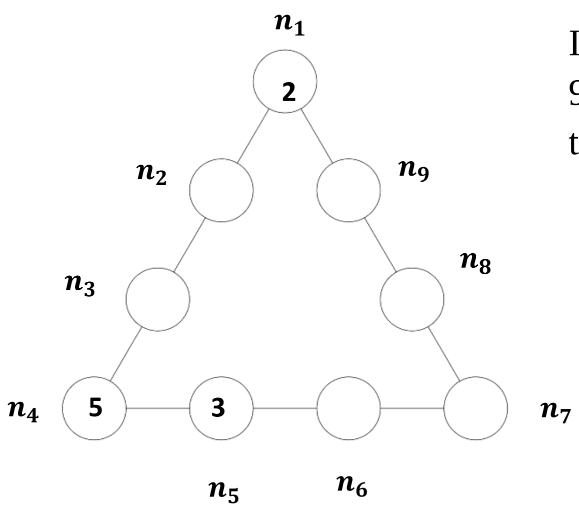
Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

POSSIBILI SOLUZIONI DEI QUESITI PROPOSTI

I PARTE

1. **TRIANGOLI S-MAGICI**



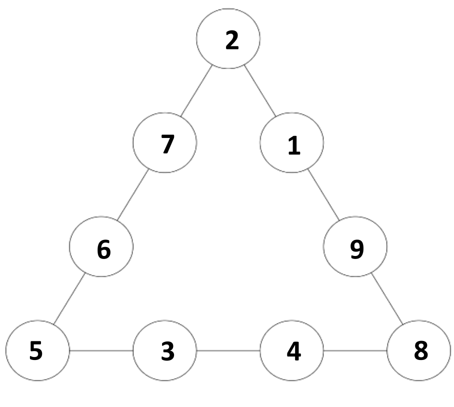
Indichiamo con $n_1, n_2, \dots, n_9$ i nove numeri da 1 a 9 da sistemare come in figura, poiché la somma sui tre lati deve essere 20 si ha che

$$n_2 + n_3 = 13$$

$$n_6 + n_7 = 12$$

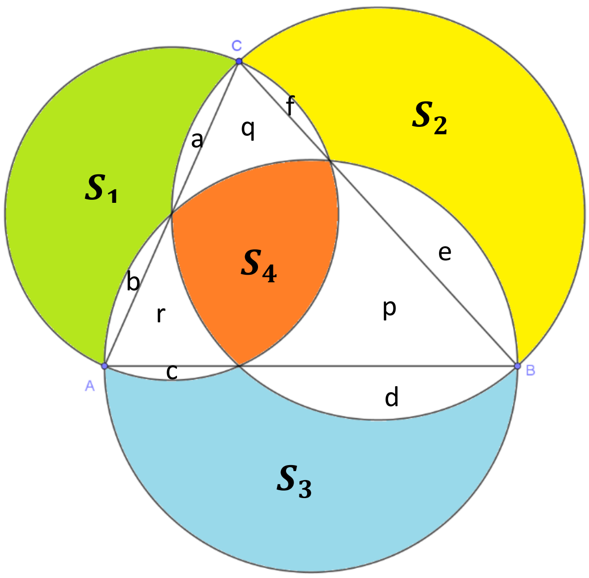
$$n_7 + n_8 + n_9 = 18.$$

La somma di tutti e tre i lati è $60 = (n_1 + \ldots + n_9) + 2 + 5 + n_7$, ma $(n_1 + \ldots + n_9) = \frac{10 \cdot 9}{2}$ da cui $n_7 = 8$. A questo punto, posizionando i numeri rimasti si ottiene un seguente triangolo 20-magico.



2. AIUOLE GEOMETRICHE

Indichiamo con le lettere $a, b, c, d, e, f, p, q, r$ le aree come indicato in figura.



Otteniamo le seguenti uguaglianze:

$$S_1 + b + a = c + r + S_4 + q + f;$$

$$S_2 + f + e = a + q + S_4 + p + d.$$

$$S_3 + c + d = r + p + S_4 + b + e;$$

Sommando entrambi i membri otteniamo:

$$(S_1 + S_2 + S_3) = 2(r + p + q + S_4) + S_4$$

quindi $(S_1 + S_2 + S_3) - S_4 = 2S$.

3. DIMOSTRAZIONE SCOLORITA

TEOREMA
Esistono infiniti primi della forma $4k + 3$
DIMOSTRAZIONE
Consideriamo l'insieme costituito dai numeri primi naturali della forma $4k + 3$ con $k \in \boldsymbol{N}$ e $k > 0$.

Osserviamo che tale insieme è non vuoto poiché ad esempio $\boxed{7 = 4 \cdot 1 + 3}$

Supponiamo $\boxed{\text{per assurdo}}$ che tale insieme sia finito e siano $p_1, \dots, p_n$ i suoi elementi con $3 < p_1 < \cdots < p_n$.

Si considerino ora i numeri naturali $M = 4p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ e $N = M + 3$.

Da qui segue che $N = 4k + 3$ con $k = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$.

Si vede facilmente che 3 non divide N poiché altrimenti 3 $\boxed{\text{dividerebbe}}$ M ma ciò è assurdo perché 3 non divide 4 ed è un numero primo diverso da tutti i primi $p_1, \ldots, p_n$.

Poiché $N > p_n$ ed è della forma $4k + 3$ allora necessariamente non è primo; sia quindi $N = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$ una sua fattorizzazione con $q_1, \ldots, q_s$ primi positivi non necessariamente distinti.

Tutti i primi dispari sono della forma $4k + \boxed{1}$ o $4k + 3$, il prodotto di primi della forma $4k + 1$ è del tipo $\boxed{4k+1}$, il prodotto di due primi della forma $4k + 3$ è del tipo $4k + 1$; essendo N della forma $4k + 3$ esisterà quindi un numero dispari di fattori primi di N della forma $4k + 3$.

Sia $q = 4m + 3$ il minimo di questi fattori. Possiamo notare che $q \neq p_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ poiché se fosse $q = p_j$ per qualche $j \in \{1, \ldots, n\}$ allora q dividerebbe M e q dividerebbe N e quindi q dividerebbe 3 ma ciò è assurdo poiché $\boxed{q = p_j > 3}$. Quindi q è un numero primo della forma $4m + 3$ con $m \geq 0$, perciò necessariamente $q = 3$ che è assurdo poiché 3 non divide N.

II PARTE

4. CRUCINUMERICO

Per la sua risoluzione suggeriamo di seguire il seguente ordine.

1-V Il numero è divisibile per 11 perché $495 = 5 \cdot 11 \cdot 9$ e quindi il numero di cifre da cui è composto deve essere pari. Inoltre poiché deve essere divisibile per 9 la somma delle cifre di questo numero deve essere divisibile per 9. Indichiamo con $2k$ il numero di cifre di tale numero, la somma delle cifre è quindi $10k$ per cui il minimo numero divisibile per 9 della forma $10k$ è 90 da cui $k = 9$ quindi il numero di cifre è 18.

7-O $36'000'000 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^6$, il numero di divisori sono $9 \cdot 3 \cdot 7 = 189$. Il totale dei divisori che sono anche quadrati sono $5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$. Il numero di divisori che non sono quadrati sono quindi $189 - 40 = 149$.

8-O Indichiamo con S la somma di tre numeri interi x, y, z tali che $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ e $-1 \leq z \leq 1$. Sappiamo che $-3 \leq S \leq 3$, quindi le possibili somme sono 7 mentre le somme considerate in una tabella 3×3 sono 8, quindi per il principio dei cassetti almeno due somme hanno lo stesso risultato.

2-V Le cifre di N si ottengono considerando che N è formato da:

9 cifre da 1 a 9;

$(99-9)\times 2=180$ cifre da 10 a 99;

$(999-99)\times 3=2700$ cifre da 100 a 999;

$(2019-999)\times 4=4080$ cifre da 1000 a 2019.

Il numero N è formato quindi da $9+180+2700+4080=6969$ cifre.

6-O Il coefficiente del termine a^3b^8 è $\binom{11}{3}=\frac{11!}{3!\cdot 8!}=165$.

3 – V $\frac{13\cdot 14}{2}+1=92$

4-O Poiché il numero deve essere divisibile per 3 le scelte per il numero mancante sono 1, 4 o 7. y è divisibile per 7 l'unica possibilità per la cifra mancante è 7.

5. CODICI SEGRETI

Indichiamo con a e b le cifre cancellate del codice segreto, poiché è multiplo di 153 vale $ab020387 \equiv_{153} 0$. Dato che $153=17\cdot 9$ devono valere

$$ab020387 \equiv_9 0 \qquad \text{e} \qquad ab020387 \equiv_{17} 0.$$

Poiché il codice deve essere multiplo d 9 la somma delle cifre deve essere divisibile per 9 quindi $a+b\equiv_9 7$.

Possiamo scrivere il codice nel seguente modo:

$$ab\cdot 100^3+2\cdot 100^2+3\cdot 100+87$$

e tenendo conto che $100\equiv_{17}-2$ e $87\equiv_{17} 2$ si ha:

$$-8ab+8-6+2\equiv_{17} 0$$

da cui $-8ab\equiv_{17}-4 \rightarrow 2ab\equiv_{17} 1 \rightarrow 2ab\equiv_{17} 18 \rightarrow ab\equiv_{17} 9$.

Pertanto abbiamo le seguenti possibilità per ab:

$$09;\;\; 26;\;\; 43;\;\; 60;\;\; 77;\;\; 94.$$

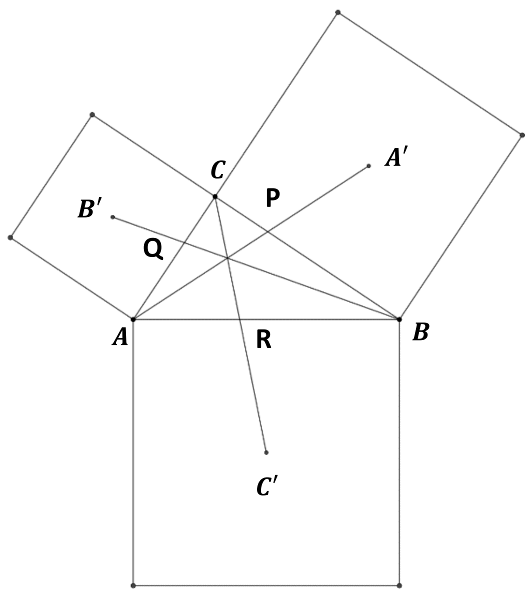
L'unica che soddisfa $a+b\equiv_9 7$ è evidentemente 43. Pertanto il codice segreto è:

$$43020387.$$

6. DISTANZE POLINOMIALI

Indichiamo con $q(x)$ il polinomio a coefficienti interi tale che $q(x) = p(x) - 2$, poiché $p(2) = \cdots = p(2020) = 2$ ne segue che $q(2) = \cdots = q(2020) = 0$. Possiamo quindi scrivere $q(x)$ nel seguente modo: $q(x) = a(x-2) \dots (x-2020)$. Dal fatto che $p(1) = 3$ abbiamo che $q(1) = 1$ e quindi $q(1) = a(-1) \dots (-2019)$ da cui $a = -\frac{1}{2019!}$. Il polinomio $p(x) = -\frac{1}{2019!}(x-2)\dots(x-2020) + 2$, per trovare la distanza che l'amico Egnazio deve percorrere valutiamo il polinomio in 0 ottenendo $p(0) = 2022$.

CI INCONTREREMO?



Notiamo che $A\hat{B}A' \cong C\hat{B}C' \cong \hat{B} + 45°$, inoltre

$\text{area}(ABA') = \frac{1}{2} AB \cdot A'B \cdot \sin(A\hat{B}A')$

$\text{area}\ (CBC') = \frac{1}{2} BC \cdot BC' \cdot \sin(C\hat{B}C')$.

Poiché $A'B = BC\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $BC' = AB\frac{\sqrt{2}}{2}$ si ottiene che le due aree considerate sono uguali.

Indichiamo con P, Q e R rispettivamente i punti di intersezione tra AA' e BC, BB' e AC, CC' e AB. Siano h_1 e h_2 le misure delle altezze condotte da A e A' rispettivamente sul lato BC.

Si ha che:

$\text{area}\ (ABA') = \frac{PB(h_1 + h_2)}{2}$;

$\text{area}\ (ACA') = \frac{PC(h_1 + h_2)}{2}$;

da cui si ottiene $\frac{PB}{PC} = \frac{\text{area}(\ ABA')}{\text{area}\ (ACA')}$.

Analogamente:

$\frac{CQ}{QA} = \frac{\text{area}(\ BCB')}{\text{area}\ (BAB')}$ e $\frac{AR}{RB} = \frac{\text{area}\ (CAC')}{\text{area}(\ CBC')}$; quindi

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{\text{area}\ (ABA')}{\text{area}(ACA')} \cdot \frac{\text{area}(BCB')}{\text{area}\ (BAB')} \cdot \frac{\text{area}(CAC')}{\text{area}(CBC')}$$

ma area $(ABA') = area(CBC')$, area$(ACA') = area(CAC')$ e area$(BCB') = area(CBC')$ da cui segue che $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$, quindi per il teorema di Ceva si incontrano in un punto.