16 febbraio 2018 – II Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

POSSIBILI SOLUZIONI DEI QUESITI PROPOSTI

I PARTE

1. COMBINAZIONI DI ETA'

Se indichiamo con la terna (a, b, c) le età rispettivamente di Anna, Beatrice e Camilla risulta

$0 \leq a, b, c < 50$ e

$$(a-b)^2 + (c-b)(c+b) = (a-c)^2$$

da cui si ottiene che

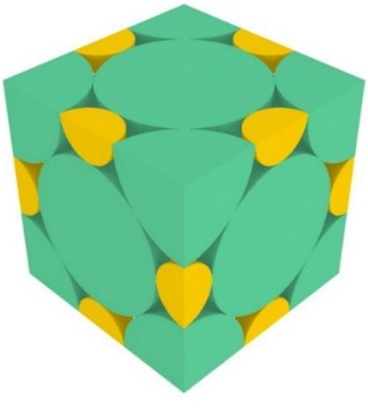
$$2ac - 2ab = 0$$

$$2a(c-b) = 0$$

i. Se $a = 0$, ovvero l'età di Anna è minore di 1 anno, allora le soluzioni sono del tipo $(0, b, c)$ con $0 \leq b, c < 50$.
ii. Se $a > 0$ allora le soluzioni sono del tipo (a, b, b) con $1 \leq a < 50$ e $0 \leq b < 50$, quindi Camilla e Beatrice hanno la stessa età e l'età di Anna è maggiore di 1 anno otteniamo 49 possibilità di scelta per l'età di Anna e 50 possibilità per le età Camilla e Beatrice.

In totale le terne che risolvono l'equazione sono $50^2 + 50(49) = 4950$.

2. SALE DA CUCINA



Si hanno:
- 6 semisfere verdi,
- 8 ottavi di sfere verdi,
- 1 sfera gialla (interna),
- 12 quarti di sfere gialle.

Il volume risulta quindi $V = 4\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) + 4\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$.

Per il Teorema di Pitagora si ha $(R+r) = \sqrt{2}R$, quindi $R = r(\sqrt{2}+1)$

Il volume occupato in funzione di r è quindi $4\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}+1\right)^{3}r^{3}+4\frac{4}{3}\pi r^{3}$

3. DIMOSTRAZIONE SCOLORITA

TEOREMA
Un numero naturale a è divisibile per 7 se e solo se nella sua scrittura posizionale in base dieci il numero, che si ottiene sottraendo il doppio della cifra dell'unità di a dal numero formato dalle cifre di a con l'omissione della cifra delle unità, è divisibile per 7.
DIMOSTRAZIONE
In generale, possiamo scrivere $a = 10q + r$ con $0 \leq r < 10$

Nella scrittura posizionale in base dieci q è il numero formato dalle cifre di a con l'omissione della delle unità, la quale è r. Quindi l'enunciato diventa: un numero naturale è divisibile per 7 se e solo se lo è il numero $q - 2r$.

Ora dimostriamo la parte necessaria.

Infatti supponiamo che $a = 10q + r$ con $0 \leq r < 10$ sia divisibile per 7, ossia che esiste $h \in N$ tale che $a = 7h$, allora si ha che $7h = 10q + r$ o in modo equivalente $r = 7h - 10q$

Sostituendo otteniamo che

$$q - 2r = q - 2(7h - 10q) = q - 14h + 20q = 21q - 14h = 7(3q - 2h)$$

Quindi $q - 2r$ è divisibile per 7.

Viceversa supponiamo che $q - 2r$ sia divisibile per 7, ossia esiste $k \in N$ tale che $q - 2r = 7k$, ciò significa che $q = 7k + 2r$ e quindi otteniamo che

$$a = 10(7k + 2r) + r = 70k + 20r + r = 7(10k + 3r)$$

e quindi a è divisibile per 7.

II PARTE

4. CRUCINUMERICO

1 7	2 9	■	3 1	■
4 9	6	3	1	■
3	■	■	■	5 5
1	■	6 1	3	2

1-V Indichiamo con $abcd$ il numero cercato. Allora

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d & + \\ d & c & b & a & = \\ \hline 9 & 3 & 2 & 8 & \end{array}$$

Poiché stiamo cercando il massimo $a = 7$ e $d = 1$, $b = 9$ e $c = 3$. Il numero cercato è quindi 7931.

6-O Indichiamo con ab un numero di due cifre che soddisfi le ipotesi b. e c. Una cifra è necessariamente 1 e l'altra è un numero primo, i numeri che soddisfano le tre condizioni sono $13, 17, 31$ e 71 la cui somma è 132.

Risolviamo ora l'equazione diofantea $32x - 21y = 5$.

Applicando l'algoritmo di Euclide otteniamo:

$$32 = 21 \times 1 + 11$$

$$21 = 11 \times 1 + 10$$

$$11 = 10 \times 1 + 1$$

quindi

$$1 = 11 - 10$$

$$1 = 11 - (21 - 11) = 2 \times 11 - 21$$

$$1 = 2 \times (32 - 21) - 21 = 2 \times 32 - 3 \times 21$$

Moltiplicando per 5 otteniamo

$$5 = 10 \times 32 - 15 \times 21$$

Quindi $(10, 15)$ è una soluzione particolare della nostra equazione diofantea, le soluzioni sono $(10 + 21t; 15 + 32t)$ con $t \in R$, poiché x e y di 100 risulta $t \leq 2$. La soluzione è quindi: $x = 52$ e $y = 79$.

2-V $2x - 8 = 96$

3-V $303 = 17^2 + 14$ da cui $303 \equiv_{17} 14$ quindi
$303^{303} \equiv_{17} 14^{303} \equiv_{17} 14^{17^2+14} \equiv_{17} 14^{15} \equiv_{17} 5^{5\cdot 15} \equiv_{17} 5^{75} \equiv_{17} 5^{4\cdot 17}5^7 \equiv_{17} 5^{11}$

$5^{11} \equiv_{17} 14^2 \cdot 5 \equiv_{17} 70 \cdot 14 \equiv_{17} 11.$

4-O Poiché la somma delle cifre deve essere 19 il numero cercato è 9631

5. NUMERI CIVICI

$f(1) = g(1) = 0$ da cui $1 + a + b + c = 0$. Se gli zeri di $f(x)$ sono $1, p, q$ allora gli zeri di $g(x)$ sono $1, p^2, q^2$. Dalle formule di Vietè troviamo che:

- $pq = -c$;
- $p^2q^2 = -a$;
- $1 + p + q = -a$;
- $p + q + pq = b$;
- $1 + p^2 + q^2 = -b$.

Da ciò si deduce che $a = -c^2$, $(-a)^2 = (1 + p + q)^2 = 1 + p^2 + q^2 + 2pq + 2p + 2q$ e

$b = c^4$.

Poiché $1 + a + b + c = 0$ allora $1 - c^2 + c^4 + c = (c+1)(c^3 - c^2 + 1) = 0$ quindi $c = -1$ poiché $c^3 - c^2 + 1$ non ha radici intere. Il valore di $a^{2018} + b^{2018} + c^{2018}$ è pertanto 3.

6. GIOCHI DOMENICALI

La somma di tre numeri estratti è pari se:

a. tutti i numeri estratti sono pari: $\binom{45}{3}$;
b. un solo elemento è pari: questo numero può essere scelto in 45 modi mentre i restanti possono essere scelti arbitrariamente nell'insieme $\{1,3,7,\dots,89\}$, in $\binom{45}{2}$ modi.

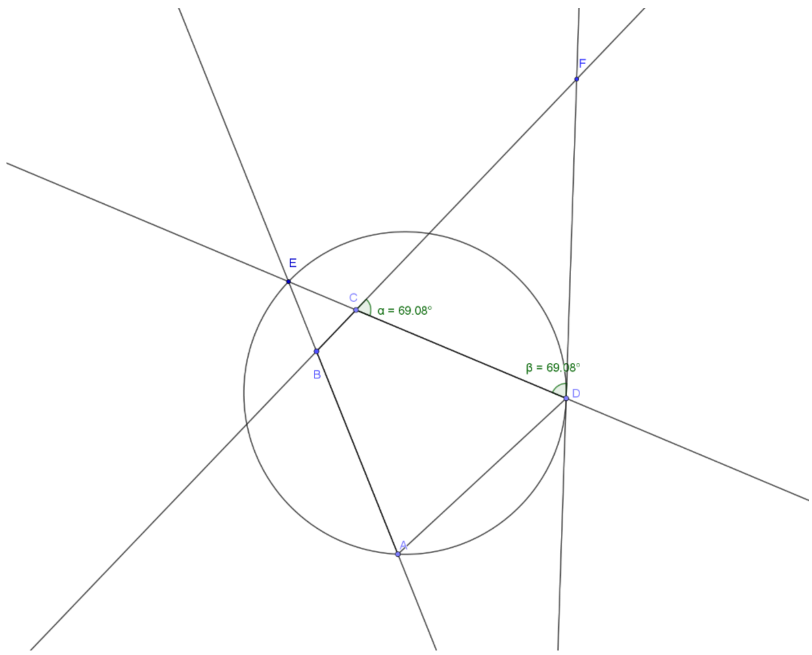
Pertanto le combinazioni vincenti per Egnazio sono $45\binom{45}{2} + \binom{45}{3}$.

La somma di tre numeri estratti è divisibile per 3 se siamo in uno di questi quattro casi:

a. se tutti e tre i numeri sono divisibili per 3, la scelta può essere fatta in $\binom{30}{3}$ modi diversi.
b. Se tutti e tre i numeri divisi per 3 hanno come resto 1 allora la somma è divisibile per 3. Le combinazioni in questo caso sono sempre $\binom{30}{3}$.
c. Se tutti e tre i numeri divisi per 3 hanno come resto 2 allora la somma è divisibile per 3. Le combinazioni sono sempre $\binom{30}{3}$.
d. Se uno dei tre numeri ha come resto 1, uno ha resto 2 e l'altro è divisibile per 3. Anche in questo caso la somma delle cifre è divisibile per 3, otteniamo 30^3 possibilità.

Le combinazioni vincenti per Girolamo sono $3\binom{30}{3} + 30^3$.

7. DIMOSTRAZIONE



Ipotesi mancante: AB e CD non paralleli.

$ABCD$ ciclico quindi $\widehat{EAD} + \widehat{BCD} = \pi$.

$\widehat{EAD} \cong \widehat{DCF}$ poiché supplementari dello stesso angolo $\widehat{BCD}$.

$\widehat{EDF} \cong \widehat{EAD}$ poiché insistono sullo stesso arco ED.