UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PERUGIA

FACOLTA' DI SCIENZE MM FF NN

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

" PREREQUISITI DI MATEMATICA "

(Prof. Marcello Ragni)

INDICE DEGLI ARGOMENTI

1- CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI [pag.1]

- **1.1-** GENERALITÀ E NOTAZIONI
- **1.2-** OPERAZIONI TRA INSIEMI
- **1.3-** APPLICAZIONI
- **1.4-** FUNZIONE INVERSA
- **1.5-** FUNZIONE COMPOSTA

2- NUMERI REALI – RETTA REALE – PIANO CARTESIANO [pag. 9]

- **2.1-** NUMERI REALI
- **2.2-** FUNZIONI REALI – MONOTÒNIA
- **2.3-** RETTA REALE
- **2.4-** INTERVALLI – VALORE ASSOLUTO – DISTANZA
- **2.5-** PIANO CARTESIANO
- **2.6-** DISTANZA IN $\Re^2$ – PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO – CIRCONFERENZA
- **2.7-** OPERAZIONI ELEMENTARI SU $\Re$

3- CENNI DI TRIGONOMETRIA [pag. 23]

- **3.1-** ANGOLI
- **3.2-** FUNZIONI TRIGONOMETRICHE
- **3.3-** FORMULE GONIOMETRICHE
- **3.4-** TRIGONOMETRIA DEI TRIANGOLI RETTANGOLI
- **3.5-** FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

4- RETTE E PARABOLE [pag, 29]

- **4.1-** EQUAZIONE DELLA RETTA
- **4.2-** DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA
- **4.3-** RETTA PER DUE PUNTI
- **4.4-** FASCIO DI RETTE PER UN PUNTO
- **4.5-** INTERSEZIONE E PARALLELISMO TRA RETTE
- **4.6-** RETTE PERPENDICOLARI
- **4.7-** TRASLAZIONE DEGLI ASSI
- **4.8-** PARABOLE

5- DISEQUAZIONI [pag.34]

- **5.1-** GENERALITÀ
- **5.2-** DISEQUAZIONI DI 1° E 2° GRADO
- **5.3-** DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO
- **5.4-** DISEQUAZIONI IRRAZIONALI
- **5.5-** DISEQUAZIONI ESPONENZIALI
- **5.6-** DISEQUAZIONI LOGARITMICHE
- **5.7-** DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE
- **5.8-** DISEQUAZIONI RAZIONALI

ESERCIZI SU RETTE, CERCHI, … [pag.45]

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI [pag. 48]

SOLUZIONI [pag. 49,50]

1 - CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

1.1- Generalità e notazioni.

Il concetto di "*insieme*" (o "*aggregato*", o "*collezione*", o "*famiglia*") è considerato come primitivo, cioè innato nelle nostre menti. In ogni caso consideriamo assegnato un insieme quando è chiaro quali "*elementi*" (od "*oggetti*", o "*punti*") appartengono ad esso e quali non gli appartengono.

Quindi per indicare un particolare insieme si usano spesso notazioni che specificano i suoi elementi. Ad esempio con $\{x,y,z\}$ si indica l'insieme costituito dai tre elementi x,y,z. Con $\{x_1,x_2,x_3,...\}$ si indica un insieme di elementi di cui fanno parte, oltre ad x_1, x_2, x_3, tutti e soli quegli elementi che seguono una chiara legge di ricorrenza individuata da x_1, x_2, x_3. Ad esempio $\{0,1,2,3,...\}$ indica l'insieme dei **numeri naturali** (che indicheremo con $\boldsymbol{N}$) e la legge di ricorrenza indica che l'elemento $n+1$ appartiene a questo insieme, se ad esso appartiene l'elemento n. Dato l'insieme $\{1, 1/2, 1/3,...\}$, si può dire per esempio che 0.01 $(=1/100)$ fa parte dell'insieme, mentre 0.45 $(=9/20)$ non fa parte dell'insieme, in quanto la legge di ricorrenza indica che fanno parte dell'insieme tutti e soli i reciproci dei numeri naturali positivi.

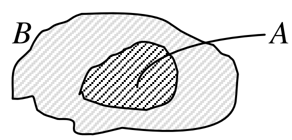
In seguito con $\mathfrak{R}$ indicheremo l'insieme dei **numeri reali**, con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei **numeri razionali**, con $\mathfrak{R}-\mathbb{Q}$ l'insieme dei **numeri irrazionali**, con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei **numeri interi relativi**, con $\varnothing$ l'**insieme vuoto** (cioè costituito da nessun elemento).

> Un numero reale è razionale se si può rappresentare come rapporto di due interi relativi (di cui il secondo non nullo); quindi sono numeri razionali i numeri interi, i numeri decimali limitati (cioè con un numero finito di cifre decimali) e i numeri decimali non limitati, ma periodici. Un numero reale non razionale si dice irrazionale e quindi i numeri irrazionali sono i numeri decimali non limitati e non periodici.

Assegnati un insieme A ed un oggetto x, se x è un elemento di A scriveremo $\boldsymbol{x \in A}$ (e si legge "*x appartiene ad A*" oppure "*x appartenente ad A*"); mentre se x non è elemento di A scriveremo $\boldsymbol{x \notin A}$ (e si legge "*x non appartiene ad A*" oppure "*x non appartenente ad A*"). Ad esempio $0.\overline{3} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $0.\overline{3} \notin \boldsymbol{N}$, $2 \in \mathbb{Z}$, ...

Assegnati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B, diremo che "*A è contenuto in B*" e scriveremo $\boldsymbol{A \subset B}$. Ad esempio risulta $\mathbb{Q} \subset \mathfrak{R}$, $\boldsymbol{N} \subset \mathbb{Q}$, $\boldsymbol{N} \subset \mathbb{Z}$. La frase "*ogni elemento di A è anche elemento di B*" in simboli matematici (ormai universalmente usati) si scrive

$$\forall\, \boldsymbol{x \in A \Rightarrow x \in B}$$



dove il quantificatore " $\forall$ " si usa per dire "qualunque" oppure "per ogni", mentre il simbolo "$\Rightarrow$" si legge "implica" oppure "accade che" ed ha il significato che se accade ciò che sta scritto alla sua sinistra, allora necessariamente accade ciò che sta scritto alla sua destra. Quindi possiamo scrivere sinteticamente la seguente definizione

$$\boldsymbol{A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A \Rightarrow x \in B).}$$

Per convenzione si suppone $\varnothing \subset A$, per ogni insieme A.

Di particolare importanza nelle discipline matematiche (e non solo in queste) è sapere negare una frase, nel senso che riscontrata o supposta falsa una asserzione, si deve saper esprimere con chiarezza e completezza l'asserzione contraria che non solo risulterà (o sarà ipotizzata come) vera, ma che anche contemplerà tutte le alternative possibili a quella. E in questo senso ogni asserzione ha la sua contraria. Portiamo un esempio.

Siano N l'insieme degli uomini con i capelli neri ed S l'insieme degli uomini sposati. L'asserzione

P “ $\forall x \in N \Rightarrow x \in S$ “ (= “ $N \subset S$ “)

cioè “*tutti gli uomini con i capelli neri sono sposati*” è falsa. L'asserzione

Q “ $\forall x \in N \Rightarrow x \notin S$ “

cioè “*tutti gli uomini con i capelli neri non sono sposati”* <u>non</u> è la contraria della **P**, perché, nonostante la **Q** escluda la **P** e viceversa, anche la **Q** è falsa. L'asserzione contraria della **P** è “*esiste un uomo con i capelli neri che non è sposato”,* che in simboli matematici si scrive

$\cancel{\mathbf{P}}$ “ $\exists\, x \in N : x \notin S$ “ (= “ $N \not\subset S$ “)

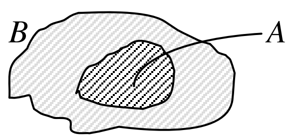
dove il quantificatore “ $\exists$ “ si legge “*esiste*”, oppure “*c'è*”, oppure “*è possibile trovare*”, mentre il simbolo “ **:** “ ha il significato di “ *tale che* “, oppure “ *in modo che* “. Si noti che l'asserzione contraria della **Q** è

$\cancel{\mathbf{Q}}$ “ $\exists\, x \in N : x \in S$ “

cioè “*esiste un uomo con i capelli neri che è sposato*”.

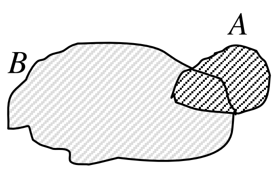
Riepilogando, dati due insiemi A e B, possiamo scrivere:

(1.1.1) $$\boldsymbol{A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)}$$



(si legge “A è contenuto in B se e solo se ogni elemento di A è anche elemento di B”);

(1.1.2) $$\boldsymbol{A \not\subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists\, x \in A : x \notin B)}$$



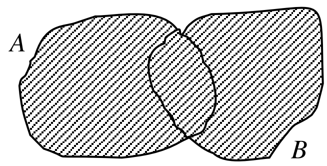
(si legge "A non è contenuto in B se e solo se esiste (almeno) un elemento di A che non appartiene a B"). Si noti che il simbolo " $\Leftrightarrow$ " di doppia implicazione si legge "*se e solo se*", oppure "*implica ed è implicato*". Si può notare, in particolare anche nelle (1.1.1) e (1.1.2), che ogni frase si può ottenere "manualmente" dalla sua contraria sostituendo il quantificatore " $\exists$ " con " $\forall$ " e viceversa, il simbolo " $:$ " con " $\Rightarrow$ " e viceversa, e infine negando l'ultima relazione.

Diremo che due insiemi sono "*uguali*", e scriveremo $\boldsymbol{A = B}$, se risulta sia $A \subset B$, sia $B \subset A$ (cioè si devono verificare entrambe). Risulterà allora $\boldsymbol{A \neq B}$ (A diverso da B) se risulta $A \not\subset B$ e/o $B \not\subset A$ (cioè è sufficiente almeno una delle due).

Assegnati due insiemi A e B con $A \subset B$, A viene chiamato sottoinsieme di B; se in particolare A è determinato come l'insieme degli elementi di B che godono di una proprietà P, si usa scrivere $A = \{x \in B \ / \ \mathrm{P}(x)\}$. Ad esempio l'insieme dei numeri interi positivi dispari si può indicare con $\{x \in \mathbb{N} \ / \ x = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$. Per esercizio si noti che è

$$\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 + 3x + 2 = 0\} = \{-1, -2\} \quad , \quad \{x \in \mathbb{N} \ / \ x^2 + 3x + 2 = 0\} = \emptyset.$$

1.2- Operazioni tra insiemi.

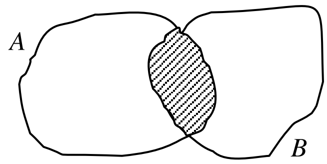


Si chiama ***unione*** di due insiemi A e B, e si indica con $\boldsymbol{A \cup B}$, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi A e B.

Questa definizione si può estendere ad una qualunque famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi ponendo

(1.2.1) $$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \ / \ \exists\, A \in \mathcal{A} \ : \ x \in A\},$$

cioè, data una famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi, chiameremo loro unione (che indicheremo con $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$) l'insieme degli elementi x per cui è possibile trovare almeno un insieme $A \in \mathcal{A}$ tale che $x \in A$.



Si chiama ***intersezione*** di due insiemi A e B, e si indica con $\boldsymbol{A \cap B}$, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A, sia a B (cioè l'insieme degli elementi che A e B hanno in comune). Due insiemi si dicono ***disgiunti*** se risulta $A \cap B = \emptyset$.

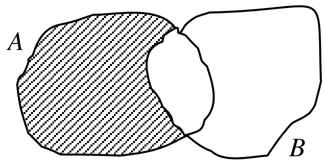
Se $\mathcal{A}$ è una famiglia di insiemi, la loro intersezione è definita da:

(1.2.2) $$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \ / \ \forall\, A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ x \in A\}.$$

Assegnata una famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi, si noti che risulta:

$$x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \ \Leftrightarrow \ (\forall\, A \in \mathcal{A} \Rightarrow x \notin A) \qquad (\text{Cfr.}(1.2.1));$$

$$x \notin \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \iff (\exists\, A \in \mathcal{A} \,:\, x \notin A) \qquad \text{(Cfr.(1.2.2))}.$$



Si chiama ***differenza*** tra due insiemi A e B, e si indica con $\boldsymbol{A - B}$, l'insieme degli elementi di A che non sono elementi di B, cioè:

$$A - B = \{x \in A \,:\, x \notin B\}.$$

Se è $B \subset A$, allora la differenza $A - B$ si chiama ***complementare*** di B rispetto ad A e si indica con $\mathcal{C}_A B$. Spesso si omette l'indice A dal simbolo $\mathcal{C}_A B$ se risulta chiaro dal contesto che l'operazione di complementare di B è fatta rispetto ad A.

ESEMPI. Data la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ con

$A_1 = \{1\,,2\,,3\}$, $A_2 = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, 0 \le x \le 4\}$, $A_3 = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, 3 < x < \sqrt{27}\,\}$, $A_4 = \{0\,,1\,,5\}$

si noti che risulta:

$A_1 \cup A_2 = A_2$	$A_1 - A_4 = \{2,3\}$	$A_2 \cap A_3 = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, 3 < x \le 4\}$
$A_1 \cap A_2 = A_1$	$A_4 - A_1 = \{0,5\}$	$A_2 - A_3 = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, 0 \le x \le 3\}$
$A_1 - A_2 = \varnothing$	$A_2 \cap A_4 = \{0,1\}$	$A_2 \cup A_3 = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, 0 \le x < \sqrt{27}\,\}$
$A_1 \cap A_3 = \varnothing$	$A_3 \cap A_4 = \{5\}$	$A_3 - A_2 = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, 4 < x < \sqrt{27}\,\}$
$A_1 - A_3 = A_1$	$A_4 - A_2 = \{5\}$	$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, 0 \le x < \sqrt{27}\,\}$
$A_1 \cup A_4 = \{0,1,2,3,5\}$	$A_4 - A_3 = \{0,1\}$	
$A_1 \cap A_4 = \{1\}$	$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \varnothing$	

Si chiama "***prodotto cartesiano***" di due insiemi A e B (scritti in questo ordine), e si indica con $\boldsymbol{A \times B}$, l'insieme delle coppie ordinate (x,y) di elementi $x \in A$ e $y \in B$, cioè:

$$A \times B = \{(x,y) \,/\, x \in A,\ y \in B\}.$$

Per esempio, posto $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,4\}$, risulta

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\};$$

$$B \times A = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\};$$

e si noti che è $A \times B \neq B \times A$ e $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2,2)\}$.

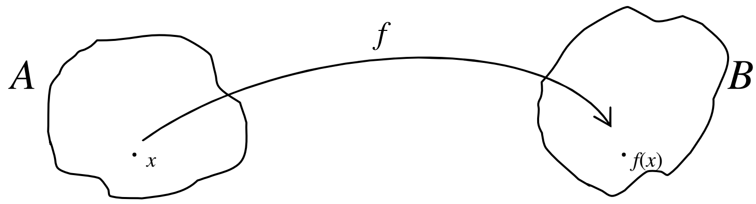
Si chiama "***prodotto cartesiano***" di n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ e si indica con $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}$ oppure con $\boldsymbol{\prod_{i=1}^{n} A_i}$, l'insieme delle n-ple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di elementi $x_i \in A_i$, $\forall$ i$=1,2,\ldots,n$, cioè

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in A_i,\ \forall\, i=1,2,\ldots,n\}.$$

Assegnato un insieme A, se risulta $A_i = A$, $\forall\, i = 1,2,\ldots,n$, porremo $\prod_{i=1}^{n} A_i = A^n$, cioè A^n indicherà il prodotto cartesiano di A con se stesso per n volte e rappresenterà l'insieme delle n-ple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di elementi di A.

1.3- <u>Applicazioni</u>.

Assegnati due insiemi A e B, si chiama "***applicazione***" (o "***funzione***") di A in B ogni legge f che associa ad ogni fissato elemento $x \in A$ uno ed un solo elemento $y \equiv f(x) \in B$.



Quindi è assegnata una applicazione quando sono assegnati tre enti: un insieme A (chiamato "***insieme di partenza***" o "***dominio***" della funzione), un insieme B (chiamato "***insieme di arrivo***" della funzione) e una legge f che associa ad ogni elemento $x \in A$ uno ed un solo elemento $f(x) \in B$ (e si scrive $f: A \to B$, oppure $A \xrightarrow{f} B$). Riterremo diverse due applicazioni se anche uno solo di questi tre enti è diverso.

Data un'applicazione $f: A \to B$, per ogni $x \in A$, l'elemento $f(x) \in B$ si chiama "***immagine***" di x tramite f. Si chiama "***codominio***" della $f: A \to B$ (e viene indicato con $f(A)$) il sottoinsieme di B costituito da tutte le immagini degli elementi di A, cioè

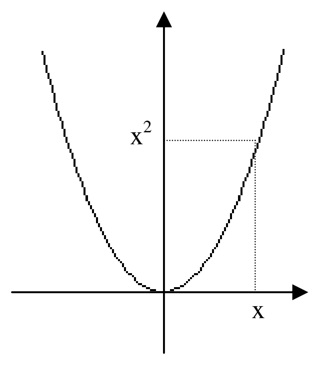
$$f(A) = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in A : f(x) = y\}.$$

Si chiama "***grafico***" di una applicazione $f: A \to B$ il sottoinsieme di $A \times B$ definito da

$$G_f = \{(x,y) \in A \times B \;/\; x \in A,\, y = f(x)\}.$$

Per ogni insieme $M \subset B$ si chiama "***immagine inversa***" di M tramite la $f: A \to B$ l'insieme $f^{-1}(M) \equiv \{x \in A \,/\, f(x) \in M\}$. In particolare si chiama immagine inversa di $y \in B$ tramite la $f: A \to B$ l'insieme $f^{-1}(y) \equiv \{x \in A \,/\, f(x) = y\}$.

ESEMPIO – L'applicazione $f: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, definita da $f(x) = x^2$, ha per codominio l'insieme: $\mathfrak{R}_0^+ \equiv \{x \in \mathfrak{R} \,/\, x \geq 0\}$ (infatti per ogni $y \in \mathfrak{R}_0^+$, ponendo $x = -\sqrt{y}$, oppure $x = \sqrt{y}$, risulta $x^2 = y$; inoltre per ogni $x \in \mathfrak{R}$ è $x^2 \in \mathfrak{R}_0^+$); mentre ha per grafico: $\{(x,x^2) \,/\, x \in \mathfrak{R}\}$. Si noti ad esempio che risulta



$$f^{-1}(\{y\in\mathfrak{R} \,/\, -1 \leq y \leq 4\}) \equiv \{x\in\mathfrak{R} \,/\, -2 \leq x \leq 2\} \text{ e } f^{-1}(4) = \{-2,2\}.$$

Una applicazione $f: A \to B$ si dice "***iniettiva***" se:

$$\boxed{\forall\, x, t \in A \text{ con } x \neq t \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(t),} \qquad (1.3.1)$$

cioè se punti diversi in A hanno sempre immagini diverse in B. In altre parole la f è iniettiva se per ogni $y \in f(A)$, l'insieme $f^{-1}(y)$ è costituito da un solo punto. La <u>non</u> iniettività di una applicazione $f: A \to$ B è espressa dalla frase

$$\exists\; x, t \in A \text{ con } x \neq t \;:\; f(x) = f(t),$$

che, come si può notare, è la contraria della (1.3.1).

Una applicazione $f: A \to B$ si dice "***suriettiva***" se

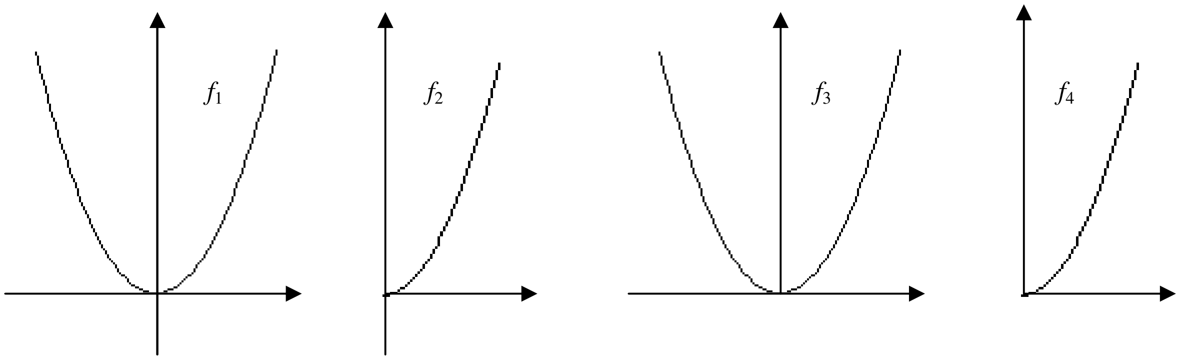
(1.3.2) $$\boxed{\forall\, y \in B \;\Rightarrow\; \exists\, x \in A \;:\; f(x) = y}$$

cioè se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A; ciò è equivalente ad affermare che il codomonio di f coincide con l'insieme di arrivo: $f(A) = B$. Una applica-zione $f: A \to B$ non è suriettiva se

$$\exists\, y \in B \;:\; \forall\, x \in A \;\Rightarrow\; f(x) \neq y \quad (\text{o anche se } \exists\, y \in B \;: \overset{-1}{f}(y) = \varnothing).$$

Infine una applicazione $f: A \to B$ si dice "***biiettiva***" se è simultaneamente iniettiva e suriettiva, e quindi se ogni elemento di B è immagine di uno ed un solo elemento di A: In questo caso si usa dire che la funzione f stabilisce una "*corrispondenza biunivoca*" tra gli insiemi A e B.

ESEMPIO – Consideriamo le applicazioni $f_1 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, $f_2 : \mathfrak{R}_0^+ \to \mathfrak{R}$, $f_3 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_0^+$, $f_4 : \mathfrak{R}_0^+ \to \mathfrak{R}_0^+$, tutte definite dalla legge $f_i(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$, i=1,2,3,4.



L'applicazione f_1 non è iniettiva (si noti ad esempio che è $f_1(2) = f_1(-2)$) e non è suriettiva (si noti ad esempio che è $\overset{-1}{f_1}(-1) = \varnothing$). L'applicazione f_2 non è suriettiva (come la f_1), ma è iniettiva, infatti fissati $x,t \in \mathfrak{R}_0^+$ con $x < t$, risulta $f_2(x) = x^2 < t^2 = f_2(t)$. L'applicazione f_3 non è iniettiva (come la f_1), ma è suriettiva, infatti per ogni $y \in \mathfrak{R}_0^+$ risulta $f_3(\sqrt{y}\,) = y$ ed anche $f_3(-\sqrt{y}\,) = y$. Infine l'applicazione f_4 è iniettiva (come la f_2) ed è suriettiva (come la f_3), cioè è biiettiva.

ESERCIZIO – Si immagini un'aula scolastica con degli studenti. Indichiamo con A l'insie-me delle penne che gli studenti hanno con sé, con B l'insieme degli studenti stessi e con $f: A \to B$ l'applicazione che ad ogni penna associa lo studente che l'ha con sé. Tra le seguenti asserzioni:

a) Ogni studente ha almeno una penna;
b) Ogni studente ha una sola penna;
c) Ogni studente che ha una penna, ne ha una sola;
d) Esiste uno studente senza penne;
e) Esiste uno studente con più di una penna;

dire quale definisce per l'applicazione f la

1) iniettività; 2) non iniettività; 3) suriettività; 4) non suriettività; 5) biiettività.

1.4- Funzione inversa.

Se $f : A \to B$ è una applicazione biiettiva, si chiama "***funzione inversa***" della f l'applicazione $f^{-1} : B \to A$ definita dalla legge che ad ogni $y \in B$ associa quel solo elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

ESEMPIO – L'applicazione $f : \mathfrak{R}_0^+ \to \mathfrak{R}_0^+$ definita da $f(x) = x^2$ è (come si è visto in precedenza) biiettiva. La sua funzione inversa si chiama "***radice aritmetica***" o semplicemente "***radice***", è definita nell'insieme dei numeri reali non negativi (!), si indica con il simbolo $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ed associa ad ogni numero reale non negativo y quello e quel solo numero reale non negativo x tale che $x^2 = y$.

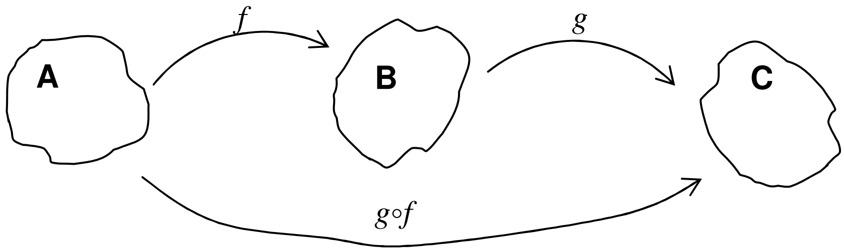
ESERCIZIO – Determinare la legge delle funzioni inverse delle seguenti:

$f_1 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R},\ f_1(x) = x + 3$ $\qquad$ $f_3 : \mathfrak{R}_0^+ \to \{y \in \mathfrak{R} \,/\, y \geq 1\},\ f_3(x) = x^2 + 1$

$f_2 : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R},\ f_2(x) = 2x + 3$ $\qquad$ $f_4 : \{x \in \mathfrak{R} \,/\, x \geq 1\} \to \mathfrak{R}_0^+,\ f_3(x) = (x - 1)^2$.

1.5- Funzione composta.

Assegnate due applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si chiama "***funzione composta***" da f e g l'applicazione $g \circ f : A \to C$ definita da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



ESEMPIO – Si immagini un'aula scolastica con degli studenti tutti seduti (in modo che ognuno di essi occupi uno ed un solo sedile). Indichiamo con A l'insieme delle penne che gli studenti hanno con sé, con B l'insieme degli studenti stessi e con C l'insieme dei sedili dell'aula. Indichiamo poi con $f : A \to B$ l'applicazione che ad ogni penna associa lo studente che l'ha con sé e con $g : B \to C$ l'applicazione che ad ogni studente associa il sedile dove esso è seduto. L'applicazione composta $g \circ f : A \to C$ associa ad ogni penna un sedile, in particolare il sedile in cui sta seduto lo studente che ha con sé la penna fissata.

Si noti che valgono le seguenti proposizioni:

$$f \text{ iniettiva, } g \text{ iniettiva} \Rightarrow g \circ f \text{ iniettiva.}$$

$$f \text{ suriettiva, } g \text{ suriettiva} \Rightarrow g \circ f \text{ suriettiva.}$$

$$f \text{ biiettiva, } g \text{ biiettiva} \Rightarrow g \circ f \text{ biiettiva.}$$

Nel caso in cui le applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono biiettive, la funzione inversa della $g \circ f$, cioè la $(g \circ f)^{-1} : C \to A$, è definita da $(g \circ f)^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(y))$.

Se $f : A \to B$ è biiettiva, risulta $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, cioè $f^{-1} \circ f : A \to A$ è l'applicazione identica in A, mentre $f \circ f^{-1} : B \to B$ è l'applicazione identica in B.

Si noti ancora che una volta definita l'applicazione $g \circ f$ (a partire da due applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$), il simbolo $f \circ g$ non ha senso, a meno che non sia $A = C$. Se poi è $A = B = C$, le applicazioni $g \circ f$ e $f \circ g$ sono in generale diverse.

ESEMPIO – Siano $f, g : \Re \to \Re$ definite da $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 3$. Risulta

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 3 \qquad , \qquad (f \circ g)(x) = (x + 3)^2.$$

2 - NUMERI REALI - RETTA REALE - PIANO CARTESIANO

2.1- Numeri reali.

In questo paragrafo daremo una caratterizzazione (o definizione) assiomatica dell'insieme dei numeri reali, senza occuparci della loro costruzione. L'insieme dei numeri reali è completamente caratterizzato dai tre gruppi ([α],[β],[γ]) di assiomi enunciati qui nel seguito che definiscono un "*campo ordinato completo*".

Diremo che un insieme H è un "***campo***" (ha la *struttura di un campo*) se in esso è possibile assegnare due applicazioni "+" e "·" (chiamate rispettivamente "***somma***" e "***prodotto***") definite nel prodotto cartesiano $H \times H$ e a valori in H in modo che sia soddisfatto il seguente gruppo di assiomi:

[α] $\forall x,y,z \in H$ risulti

α_1) $x + y = y + x$	(proprietà commutativa della "+")
α_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$	(proprietà associativa della "+")
α_3) $\exists\, 0 \in H \,:\, x + 0 = x$	(esistenza dell'elemento neutro per la "+")
α_4) $\exists\, -x \in H \,:\, x + (-x) = 0$	(esistenza dell'opposto)
α_5) $x \cdot y = y \cdot x$	(proprietà commutativa della "·")
α_6) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	(proprietà associativa della "·")
α_7) $\exists\, 1 \in H \,:\, 1 \cdot x = x$	(esistenza dell'elemento neutro per la"·")
α_8) Se $x \neq 0,\ \exists\, x^{-1} \,:\, x \cdot x^{-1} = 1$	(esistenza del reciproco)
α_9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	(proprietà distributiva della "·" rispetto alla "+")

NOTA – Si può provare che gli elementi neutri in α_3) e in α_7), l'elemento opposto in α_4) e il reciproco in α_8) sono univocamente determinati.

NOTA – Assegnati due elementi $x,y \in H$, scriveremo $x - y$ al posto di $x + (-y)$ (questa operazione di somma tra l'elemento x e l'opposto di y verrà chiamata "***sottrazione***" tra x e y); inoltre, se è $y \neq 0$ (!), scriveremo x/y, oppure $\dfrac{x}{y}$, oppure $x : y$ al posto di $x \cdot y^{-1}$ (questa operazione di prodotto tra l'elemento x e il reciproco di y verrà chiamata "***divisione***" tra x e y). In ogni caso ometteremo il simbolo "·" nel prodotto, cioè scriveremo xy al posto di $x \cdot y$.

Tra le altre proprietà che sono conseguenza del gruppo di assiomi [α], che sono di uso corrente (e sulle quali non è lecito avere dubbi), ricordiamo le seguenti (dove $a,b,c,d \in H$):

- $a = b \iff a + c = b + c$
- $a = b \iff a - c = b - c$
- $a = b \implies ac = bc$
- $a = b \iff a/c = b/c \ (c \neq 0)$
- $-(-a) = a$
- $(a^{-1})^{-1} = a \ (a \neq 0)$
- $(-a)(-b) = ab$
- $(-a)b = -ab$
- $ab = 0 \iff a = 0$ e/o $b = 0$
- $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd} \quad (b \neq 0,\ d \neq 0)$
- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \quad (b \neq 0,\ d \neq 0)$
- $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc} \quad (b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0)$

ESERCIZIO – Se con x ed y indichiamo lo stesso numero, applicando alcune delle regole della tabella precedente, possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze:

$$x = y \Leftrightarrow x^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = y(x - y) \Leftrightarrow x + y = y.$$

Poiché siamo partiti dal fatto che è $x = y$, l'ultima relazione afferma che ogni numero è uguale al suo doppio ! Stabilire in quale dei passaggi "$\Leftrightarrow$" si è verificato un errore.

\/

Diremo che un campo H è un "***campo ordinato***" se è possibile determinare un sottoinsieme $H^+ \subset H$ di elementi che chiameremo *positivi* in modo che sia soddisfatto il seguente sistema di assiomi:

[β]

β1) $\forall x,y \in H^+ \Rightarrow x + y \in H^+;$
β2) $\forall x,y \in H^+ \Rightarrow xy \in H^+;$
β3) $\forall x \in H^+ \Rightarrow -x \notin H^+;$
β4) $\forall x \in H \Rightarrow x = 0$, oppure $x \in H^+$ oppure $-x \in H^+$.

Il gruppo [β] di assiomi induce nel campo H un ordinamento, infatti se in esso si pone

$$\boxed{a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad b - a = 0 \text{ oppure } b - a \in H^+,}$$

sono soddisfatte le proprietà caratteristiche di un ordinamento totale:

- $\forall a \in H \Rightarrow a \leq a;$ (proprietà riflessiva)
- $\forall a,b \in H : a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b;$ (proprietà antisimmetrica)
- $\forall a,b,c \in H : a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c;$ (proprietà transitiva)
- $\forall a,b \in H \Rightarrow a \leq b$ oppure $b \leq a$. (legge della tricotomia)

Il simbolo "$a \leq b$", o quello equivalente "$b \geq a$", si leggerà "*a minore o uguale a b*" oppure "*b maggiore o uguale ad a*". Se vogliamo mettere in evidenza che sia $a \leq b$ con $a \neq b$, allora scriveremo $a < b$, o equivalentemente $b > a$, che si leggono "*a minore di b*" oppure "*b maggiore di a*".

Un esempio di campo ordinato è l'insieme dei numeri razionali, cioè dei numeri che si possono rappresentare come rapporto di due numeri interi (di cui il secondo non nullo).

Dagli assiomi di un campo ordinato possiamo ricavare tutte le regole solite (inderogabili!) del calcolo con le disuguaglianze. Posto $H^- = H - (H^+ \cup \{0\})$, elenchiamo le più importanti valide per ogni $a,b,c \in H$:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c;$
- $a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc;$
- $a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc;$
- $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0;$
- $ab > 0 \Rightarrow a \in H^+,\ b \in H^+$ oppure $a \in H^-,\ b \in H^-;$
- $ab < 0 \Rightarrow a \in H^+,\ b \in H^-$ oppure $a \in H^-,\ b \in H^+.$

ESERCIZIO – Provare che valgono le due seguenti proposizioni:

$$a < b,\ c < d \Rightarrow a + c < b + d; \qquad 0 < a < b,\ 0 < c < d \Rightarrow ac < bd.$$

\/

In un campo ordinato H è possibile introdurre gli importanti concetti di limitatezza, di estremo superiore e di estremo inferiore. Un sottoinsieme non vuoto A di H si dice "***limitato superiormente***" se

(2.1.1) $$\exists\, m \in H \,:\, \forall\, a \in A \;\Rightarrow\; a \leq m,$$

cioè se esiste un elemento di H che è maggiore o al più uguale di ogni elemento di A; mentre si dice "***limitato inferiormente***" se

(2.1.2) $$\exists\, \ell \in H \,:\, \forall\, a \in A \;\Rightarrow\; a \geq \ell;$$

inoltre $A \subset H$ si dice "***limitato***" se è limitato inferiormente e superiormente.

Un elemento m che verifica (2.1.1) viene chiamato un "*maggiorante*" per A o un "*limite superiore*" per A, mentre un elemento $\ell \in H$ che verifica la (2.1.2) viene chiamato un "*minorante*" per A o un "*limite inferiore*" per A. Naturalmente, se un insieme A ammette un maggiorante (un minorante), allora ne ammette infiniti. Indichiamo con M_A ed L_A rispettivamente l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti per A, cioè

$$M_A = \{m \in H \,/\, \forall\, a \in A \;\Rightarrow\; a \leq m\} \quad , \quad L_A = \{\ell \in H \,/\, \forall\, a \in A \;\Rightarrow\; a \geq \ell\}.$$

NOTA – Un insieme non vuoto $A \subset H$ <u>non</u> è limitato se non lo è inferiormente e/o superiormente. Esso è <u>non</u> limitato superiormente se $\forall\, m \in H \;\Rightarrow\; \exists\, a \in A \,:\, a > m$. Analogamente <u>non</u> è limitato inferiormen-te se $\forall\, \ell \in H \Rightarrow \exists\, a \in A \,:\, a < \ell$.

ESEMPIO – L'insieme $A = \{1/2, 2/3, 3/4, 4/5,\ldots\} \equiv \{n/(n+1) \,/\, n \in N^+\} \subset Q$, è limitato. Infatti per ogni $n \in N^+$ risulta (ad esempio) $0 < n/(n+1) < 3/2$, cioè 0 è un minorante per A e $3/2$ è un maggiorante per A. Si noti che anche $1/2$ è un minorante per A e 1 è un maggiorante per A.

Diremo che un elemento $S \in H$ è "***estremo superiore***" di un insieme non vuoto $A \subset H$ (e si indica con "*Sup A*") se sono verificate le due condizioni:

i) $S \in M_A$,

ii) $\forall\, m \in M_A \;\Rightarrow\; S \leq m$,

cioè risulta $S = Sup\,A$ se S è un maggiorante per A e inoltre è minore o uguale di ogni altro maggiorante per A. Importanti sono i seguenti teoremi, l'uno di unicità e l'altro (di cui lasciamo la dimostrazione al lettore) particolarmente utile negli esercizi.

TEOREMA **2.1.1** – <u>Se un insieme A ammette estremo superiore, esso è unico</u>.

<u>Dim</u>. Posto $S = Sup\,A$, supponiamo che sia anche $S' = sup\,A$, cioè supponiamo che oltre S, anche S' soddisfi le proprietà i) e ii). In virtù della proprietà i) risulta $S \in M_A$ e $S' \in M_A$. Allora in virtù della ii) deve risultare simultaneamente $S \leq S'$ e $S' \leq S$. E' quindi $S = S'$.

TEOREMA **2.1.2** – <u>Risulta $S = Sup\,A$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni</u>:

i') $S \in M_A$,

ii') $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, a \in A \,:\, a > S - \varepsilon$.

Diremo che un elemento $I \in H$ è "***estremo inferiore***" di un insieme non vuoto $A \subset H$ (e si indica con "$Inf\,A$") se sono verificate le due condizioni:

ì) $I \in L_A$,

ii) $\forall\, \ell \in L_A \Rightarrow I \geq \ell$,

cioè risulta $I = Inf\,A$ se I è un minorante per A e inoltre è maggiore o uguale di ogni altro minorante per A. Analoghi ai precedenti sono i teoremi:

TEOREMA **2.1.3** – Se un insieme A ammette estremo inferiore, esso è unico.

TEOREMA **2.1.4** – Risulta $I = inf\,A$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

i') $I \in L_A$,

ii') $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A\ :\ a < I - \varepsilon$.

I gruppi [α] e [β] di assiomi elencati precedentemente contengono tutte le proprietà dei numeri reali usualmente trattate dall'algebra elementare. Ma c'è un terzo gruppo [γ] di assiomi, in verità costituito dal solo ***assioma della completezza***, che serve ad ipotizzare l'esistenza dei numeri irrazionali. Se abbiamo un quadrato del quale conosciamo la lunghezza del lato (ad esempio 1) e vogliamo conoscere la lunghezza della sua diagonale, ci troviamo (usando il Teorema di Pitagora) nella necessità di risolvere l'equazione $x^2 = 2$. Con l'ausilio dei gruppi [α] e [β] di assiomi ciò non è possibile, infatti anche l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ soddisfa quegli assiomi, ma si può provare che non esiste alcun numero razionale x per cui risulti $x^2 = 2$. Di qui la necessità dell'assioma della completezza che dà al sistema dei numeri reali quella proprietà di continuità che è la chiave di volta della struttura logica dell'analisi matematica. Questo assioma distingue l'insieme dei numeri $\mathfrak{R}$ reali da ogni altro campo ordinato H e precisamente

[γ] Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente di $\mathfrak{R}$ ammette estremo superiore.

NOTA – L'assioma [γ] è equivalente all'asserzione che "ogni sottoinsieme non vuoto e limitato inferiormente di $\mathfrak{R}$ ammette estremo inferiore"; basta notare che per $A \subset \mathfrak{R}$ risulta $Inf\,A = -Sup\,\{-x \,/\, x \in A\}$.

Una conseguenza del sistema [α],[β],[γ] di assiomi è il seguente:

TEOREMA **2.1.5** – L'insieme $\boldsymbol{N}$ non è limitato superiormente.

Dim. Se per assurdo ammettiamo che $\boldsymbol{N}$ è limitato superiormente, in virtù dell'assioma [γ] esso ha in $\mathfrak{R}$ un estremo superiore S. Dalla proprietà ii') dell'estremo superiore, esiste certamente un numero $n \in \boldsymbol{N}$ con $n > S - 1$. Ma allora risulta anche $S < n + 1 \in \boldsymbol{N}$, e questo contraddice la prima proprietà i) dell'estremo superiore.

Corollari del teorema 2.1.5, di fondamentale importanza per provare l'esistenza di soluzioni per svariati problemi che si basano sulla matematica, sono i seguenti:

TEOREMA **2.1.6** – Per ogni $x \in \mathfrak{R}$ esiste un $n \in \boldsymbol{N}$ con $n > x$.

TEOREMA **2.1.7** – <u>Per ogni</u> $x,y \in \Re$ <u>con</u> $x > 0$ <u>esiste un</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>tale che</u> $nx > y$.

NOTA – La proprietà espressa dal teorema 2.1.7 è nota come "*Proprietà Archimedea dei Numeri Reali*". Geometricamente esprime il fatto che un piccolo regolo, se usato un numero sufficiente di volte, può misurare qualunque distanza. Fu Archimede a comprendere che si trattava di una fondamentale proprietà della retta e ad enunciarla esplicitamente come uno degli assiomi della geometria.

E' importante notare che assegnato un insieme $A \subset \Re$ non vuoto e limitato superiormente, il suo estremo superiore $S \equiv Sup A$ non è necessariamente un elemento di A (si vedano al riguardo gli esempi successivi). Se accade che risulta $S \in A$, allora l'elemento S viene chiamato "***massimo***" di A e si indica con $Max A$. E' facile notare che un elemento $M \in \Re$ è il $MaxA$ se e solo se risulta $M \in A$ e inoltre $\forall\, a \in A \;\Rightarrow\; a \le M$.

In modo analogo si può definire il "***minimo***" di un insieme $A \subset \Re$ ($MinA$).

ESEMPIO – Poniamo $A = \{0.1,\ 0.12,\ 0.1211,\ 0.121122,\ 0.121122111,\ 0.121122111222, \ldots\}$.Si può notare che A è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{Q}$ che non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$, a conferma che $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato, ma non completo. L'estremo superiore di A in $\Re$ è dato dal numero irrazionale:

$$0.121122111222111122221111122222\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

ESEMPIO – Poniamo $A = \{\ (n+1)/(n+2)\ \ /\ n \in \mathbb{N}\} = \{1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \ldots\}$. Come si è visto nell'esempio di pag.11, l'insieme A è limitato. In particolare risulta $Min\, A = 1/2$, infatti si ha

$$1/2 \in A \qquad \text{e} \qquad \frac{n+1}{n+2} \ge 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad 2n+2 \ge n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 0.$$

Vogliamo ora provare che è $Sup\, A = 1$. Il numero 1 è un maggiorante per A, infatti si ha

$$\frac{n+1}{n+2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 < n+2 \quad \Leftarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e quindi è verificata la proprietà i) dell'estremo superiore. Proviamo ora la ii'). fissato un arbitrario numero $\varepsilon > 0$, si noti che risulta

$$\frac{n+1}{n+2} > 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n+1 > n+2-n\varepsilon-2\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n\varepsilon > 1-2\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > (1-2\varepsilon)/\varepsilon.$$

Poiché per la proprietà archimedea dei numeri reali certamente esiste un numero naturale $n > (1-2\varepsilon)/\varepsilon$, allora lo stesso numero naturale verifica la diseguaglianza $\frac{n+1}{n+2} > 1 - \varepsilon$, cioè esiste un elemento di A che supera $1-\varepsilon$. Poiché questo vale per ogni arbitrario $\varepsilon > 0$ fissato, la dimostrazione della ii') è completa.

SULLA RADICE QUADRATA – Per ogni $x \in \Re$, risulta $x^2 \ge 0$ e quindi l'equazione $x^2 = a$ ha senso soltanto per $a \ge 0$. Si vede poi facilmente che $x = 0$ è l'unica soluzione dell'equazione per $a = 0$. Supposto allora $a > 0$, poniamo $A = \{t \ge 0\ /\ t^2 \le a\}$. Ci si può convincere facilmente che l'insieme A è non vuoto e limitato superiormente e quindi per l'assioma della completezza [γ] esiste il suo estremo superiore. Poniamo $\sqrt{a} \equiv Sup\, A$. E' possibile dimostrare (ma qui omettiamo la dimostrazione) che risulta $(\sqrt{a}\,)^2 = a$, e quindi l'equazione $x^2 = a$ (con $a > 0$) ammette una e una sola soluzione positiva, chiamata *radice aritmetica* di a. Poiché risulta anche $(-\sqrt{a}\,)^2 = a$, in definitiva le soluzioni dell'equazione $x^2 = a$ sono due, l'una opposta dell'altra.

2.2- Funzioni reali – Monotònia.

Una funzione f definita in un insieme A e a valori in $\mathfrak{R}$, si chiama "***funzione reale***". Assegnata $f : A \to \mathfrak{R}$, essa si dice "*limitata superiormente*" se è limitato superiormente il suo codominio $f(A)$. E in questo caso si chiama "*estremo superiore*" di f l'estremo superiore di $f(A)$, cioè il numero $Sup\, f(A) \equiv \underset{x \in A}{Sup}\, f(x)$. Analogamente la $f : A \to \mathfrak{R}$ si dice "*limitata inferiormente*" se $f(A)$ è limitato inferiormente e l'estremo inferiore di f è definito da $Inf\, f(A) \equiv \underset{x \in A}{Inf}\, f(x)$. Quindi la f si dice "*limitata*" se è limitato $f(A)$.

Una funzione $f : A \to \mathfrak{R}$ con $A \subset \mathfrak{R}$ (cioè funzione reale di variabile reale) si dice "***monotòna***" se verifica una delle seguenti proprietà:

- $\forall\, x,y \in A$ con $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ [In questo caso la f si dice "***non decrescente***"];
- $\forall\, x,y \in A$ con $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ [In questo caso la f si dice "***non crescente***"];
- $\forall\, x,y \in A$ con $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ [In questo caso la f si dice "***crescente***"];
- $\forall\, x,y \in A$ con $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ [In questo caso la f si dice "***decrescente***"].

Si noti che una funzione $f : A \to \mathfrak{R}$ $(A \subset \mathfrak{R})$ strettamente monotona (cioè crescente oppure decrescente) è iniettiva.

ESEMPIO – La funzione $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è monotona [infatti risulta $f(-1) > f(0)$, ma anche $f(0) < f(1)$]. Sono invece monotone (crescenti) le funzioni:

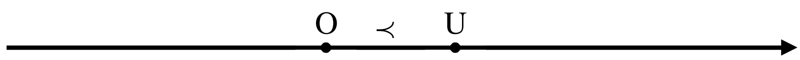
- $f : \mathfrak{R}_0^+ \to \mathfrak{R}_0^+$, $f(x) = x^2$;
- $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, $f(x) = 2x + 1$;
- $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, $f(x) = x^3$.

2.3- Retta reale.

Fissata una retta s (come insieme dei suoi punti) stabiliamo su di essa un verso positivo di percorrenza, definendo tra i suoi punti un "*ordinamento totale*" che indicheremo con "$\prec$" (si legge "precede") e cioè una relazione che goda delle proprietà:

- $\forall\, P \in s \Rightarrow P \prec P$ (proprietà riflessiva);
- $\forall\, P,Q \in s$ con $P \prec Q$ e $Q \prec P \Rightarrow P = Q$ (proprietà antisimmetrica);
- $\forall\, P,Q,R \in s$ con $P \prec Q$ e $Q \prec R \Rightarrow P \prec R$ (proprietà transitiva);
- $\forall\, P,Q \in s \Rightarrow P \prec Q$ e/o $Q \prec P$ (legge della tricotomia).

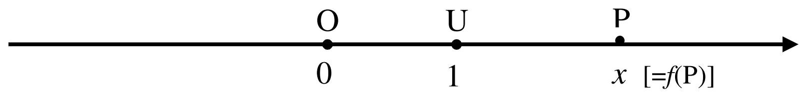
Per convenzione, se la retta è posta in posizione orizzontale rispetto all'osservatore, il verso positivo di percorrenza è quello per cui P precede Q (con $P \neq Q$) se P è alla sinistra di Q. Stabiliamo poi su s un "*sistema di riferimento*", cioè fissiamo su s due punti O e U in modo che $O \prec U$ e $O \neq U$.



Infine, fissati due punti $P,Q \in s$, indichiamo con $\overline{PQ}$ la lunghezza (calcolata in un qualunque fissato sistema di misura) del segmento di estremi P e Q. Consideriamo ora l'applicazione $f : s \to \mathfrak{R}$ definita da

$$f(\mathrm{P}) = \begin{cases} \overline{\mathrm{OP}}/\overline{\mathrm{OU}}, & \text{se } \mathrm{O} \prec \mathrm{P} \\ -\overline{\mathrm{OP}}/\overline{\mathrm{OU}}, & \text{se } \mathrm{P} \prec \mathrm{O} \end{cases}.$$

La f è biiettiva. Questo fatto ci fa identificare l'insieme dei numeri reali con i punti della retta s ed in particolare identificheremo il punto O con il numero 0 (zero), il punto U con il numero 1 e in generale il punto P con il numero $x = f(\mathrm{P})$, detto anche "*coordinata*" o "*ascissa*" di P.



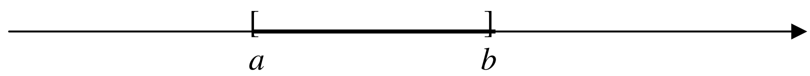
Si noti anche che l'applicazione f "*identifica*" la relazione d'ordine "$\prec$" su s con la relazione d'ordine "$\leq$" su $\mathfrak{R}$, nel senso che se $\mathrm{P} \prec \mathrm{Q}$, allora è $f(\mathrm{P}) \leq f(\mathrm{Q})$.

2.4- <u>Intervalli</u> – <u>Valore assoluto</u> – <u>Distanza</u>.

Dati due numeri reali a e b, si chiama "***intervallo chiuso***" di estremi a e b l'insieme

$$[a,b] \equiv \{x \in \mathfrak{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$$

e rappresenta sulla retta reale l'insieme dei punti del segmento congiungente a e b, estremi inclusi.



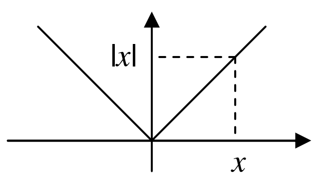
In modo analogo l'"***intervallo aperto***" e gli "***intervalli semichiusi***" (o "***semiaperti***") di estremi a e b sono definiti rispettivamente da

$$]a,b[\equiv \{x \in \mathfrak{R} \,/\, a < x < b\} \quad , \quad [a,b[\equiv \{x \in \mathfrak{R} \,/\, a \leq x < b\} \quad , \quad]a,b] \equiv \{x \in \mathfrak{R} \,/\, a < x \leq b\}.$$

Con (a,b) si indica spesso un generico intervallo di estremi a e b, senza cioè specificare se è chiuso, aperto, oppure semichiuso.

Si chiama "***valore assoluto***" l'applicazione $|\cdot| : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_0^+$ definita da

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



ESEMPI – Risulta $|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } 2x-3 \geq 0 \\ 3-2x, & \text{se } 3-2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x \geq 3/2 \\ 3-2x, & \text{se } x < 3/2 \end{cases}$.

ESERCIZIO – Esplicitare l'applicazione $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ definita da $f(x) = x + |2 - x|$ e stabilire se è monotòna.

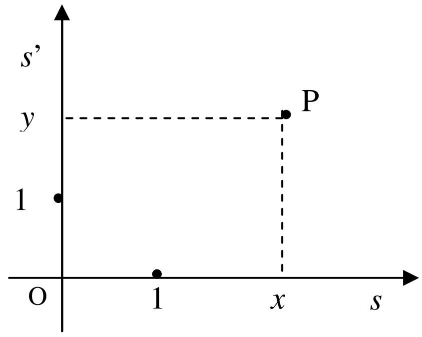
Assegnati due numeri reali x,y, si definisce "***distanza***" di x da y il numero

$$\mathrm{d}(x,y) = |x-y| = \begin{cases} x-y, & \text{se } x \geq y \\ y-x, & \text{se } x < y \end{cases}$$

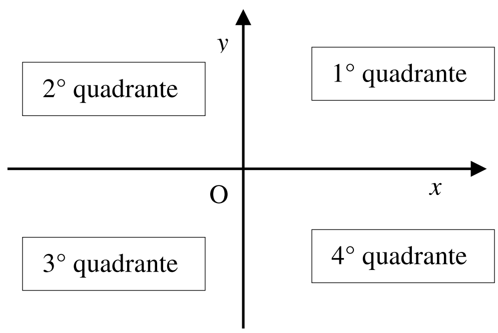
Assegnati due numeri reali x,y, si prova immediatamente che il punto medio dell'intervallo di estremi x e y è $(x+y)/2$.

2.5- Piano cartesiano [°]

Si fissino in un piano π due rette reali s ed s' distinte, non parallele e poste in modo che lo 0 della s coincida con lo 0 della s'. Di solito la retta s è posta in posizione orizzontale rispetto all'osservatore con il verso positivo di percorrenza da sinistra verso destra e viene chiamata "***asse delle ascisse***" (o "*asse delle x*" se indichiamo con x la generica ascissa); La retta s' è posta in posizione verticale (perpendicolare alla s) con il verso positivo di percorrenza dal basso verso l'alto e viene chiamata "***asse delle ordinate***" (o "*asse delle y*" se con y indichiamo la generica ordinata). Quasi sempre si assume la lunghezza dell'intervallo unitario [0,1] della s uguale alla lunghezza di quello della s', anche se ciò non è necessario (come non è necessario che le due rette siano tra loro perpendicolari). Le retta s ed s' così disposte vengono chiamate "***assi cartesiani***".



E' possibile ora definire una applicazione biiettiva f tra i punti del piano π e le coppie di $\Re^2$ (coppie di numeri reali): fissato un punto $P \in \pi$, le rette condotte da P parallele ai due assi intersecano questi in due punti (numeri) x (sull'asse delle ascisse) e y (sull'asse delle ordinate) e quindi individuano una ed una sola coppia (ordinata) di numeri reali (x,y), cioè $f(P) = (x,y)$.
Viceversa, invertendo in senso cronologico le operazioni appena descritte, ogni coppia $(x,y) \in \Re^2$ individua sul piano π quel punto P tale che $f(P) = (x,y)$. I numeri x e y vengono chiamate "***coordinate cartesiane***" del punto P e in particolare x è l'"***ascissa***", mentre y è l'"***ordinata***" del punto P. Per indicare che $P \in \pi$ ha coordinate (x,y) scriveremo $P \equiv (x,y)$ e chiameremo P "*punto* (x,y)". In seguito diremo che in un piano π è fissato un "*sistema cartesiano di riferimento*" (che indicheremo con il simbolo Oxy) se in esso sono stati fissati due assi cartesiani ortogonali e la biiezione sopra descritta.



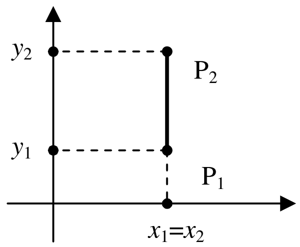
In un piano cartesiano Oxy gli assi coordinati dividono il piano stesso in quattro parti chiamati "*quadranti*" Per convenzione si chiama 1° quadrante l'insieme dei punti che hanno ascissa ed ordinata positive, 2° quadrante l'insieme dei punti che hanno ascissa negativa e ordinata positiva, 3° quadrante l'insieme dei punti che hanno ascissa ed ordinata negative, 4° quadrante l'insieme dei punti che hanno ascissa positiva ed ordinata negativa.

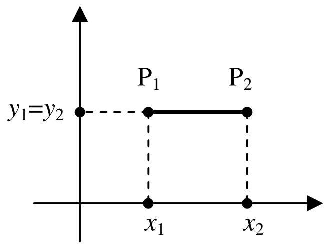
[°] NDA – Nei paragrafi precedenti abbiamo già fatto uso del piano cartesiano, in particolare nel tentativo di rendere più chiari alcuni esempi. E in verità più di una volta in queste note di matematica elementare si fa uso in alcuni esempi di strumenti non ancora definiti. Se da una parte la rigorosità dell'esposizione pretenderebbe di usare gli strumenti ed i concetti matematici soltanto dopo che questi siano stati introdotti e ben definiti, da un'altra parte la necessità di anticipare esempi fa confidare sulla innata intuizione (e sul ricordo) da parte dello studente di concetti che sono usuali nel linguaggio e nel calcolo matematico. In ogni caso tutto quello di cui si parla in queste note è stato o verrà introdotto e definito seguendo un approccio possibilmente semplice per utenti della matematica, senza rinunciare nell'esposizione alla correttezza, ma senza entrare nel rigore di una trattazione formale ed epistemologica di questi concetti di base.

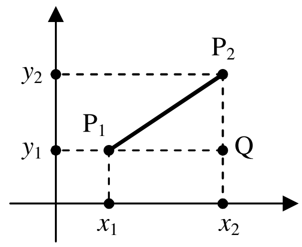
2.6- <u>Distanza in $\Re^2$</u> – <u>Punto medio di un segmento</u> – <u>Circonferenza</u>.

In un sistema cartesiano di riferimento Oxy si chiama "***distanza***" tra due punti $P_1 \equiv (x_1,y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2,y_2)$ (che indicheremo con $d(P_1,P_2)$) la lunghezza del segmento congiungente i punti P_1 e P_2 relativamente alle unità di misura stabilite sugli assi coordinati. Quindi, se in particolare è $x_1 = x_2$, risulta $d(P_1,P_2) = | y_1 - y_2|$; mentre se è $y_1 = y_2$, risulta $d(P_1,P_2) = |x_1 - x_2|$. In generale se è $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, condotta da P_1 la retta parallela all'asse delle ascisse e da P_2 la retta perpendicolare a questo asse, queste si intersecano nel punto $Q \equiv (x_2,y_1)$. I punti P_1, P_2, Q individuano un triangolo rettangolo con $d(P_1,Q) = |x_1 - x_2|$ e $d(P_2,Q) = |y_1 - y_2|$. Per il Teorema di Pitagora si ha allora

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$



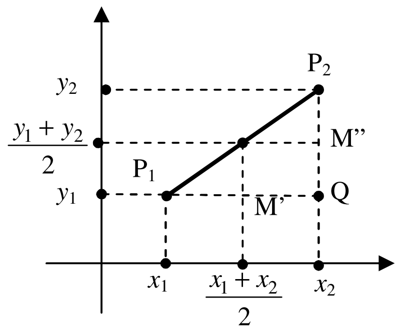




NOTA – Anche se occorrono un po' di calcoli, si può provare facilmente che per ogni terna di punti $P,Q,R \in \Re^2$ vale la nota "*disuguaglianza triangolare*": $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

Se poi $M \equiv (x_0,y_0)$ indica il punto medio del segmento P_1P_2, per il Teorema di Talete esso ha la stessa ascissa $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ del punto medio M' del segmento P_1Q ed ha la stessa ordinata $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ del punto medio M" del segmento P_2Q. In definitiva risulta

$$M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



Si chiama "***circonferenza***" di centro $P_0 \equiv (x_0,y_0)$ e raggio $r > 0$ il luogo geometrico Γ dei punti $P \equiv (x,y)$ del piano che hanno distanza r da P_0, cioè

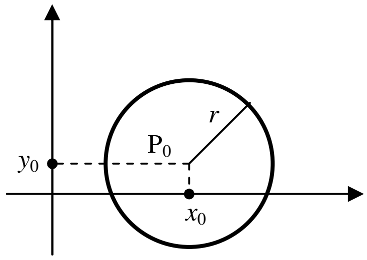
$$\Gamma = \left\{(x,y)\ /\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r\right\} = \{(x,y)\ /\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.$$

L'espressione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ viene chiamata "***equazione della circonferenza***" e può scriversi $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$, cioè

(2.6.1) $\qquad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$

dove si è posto

(2.6.2) $\qquad a = -2x_0\ , \quad b = -2y_0\ , \quad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2.$



Viceversa, poiché dalle (2.6.2) si ottiene

$$x_0 = -\frac{a}{2}\ , \qquad y_0 = -\frac{b}{2}\ , \qquad r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

una equazione del tipo della (2.6.1) rappresenta una circonferenza soltanto nel caso in cui è $a^2 + b^2 - 4c > 0$ e in questo caso la circonferenza ha centro nel punto $P_0 \equiv (-a/2, -b/2)$ e raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$.

ESEMPIO – L'equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ rappresenta una circonferenza di centro $P_0 \equiv (1,-2)$ e raggio $r = 3$. Invece l'equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ non rappresenta una circonferenza essendo $a^2 + b^2 - 4c = -4$. L'equazione $x^2 + y^2 = 1$ rappresenta la circonferenza di centro $P_0 \equiv (0,0)$ e raggio $r = 1$.

ESERCIZI –
- Provare che l'equazione della circonferenza che ammette come diametro il segmento di estremi $A \equiv (-2,-1)$ e $B \equiv (4,7)$ ha equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$.
- Sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$, determinare il punto diametralmente opposto al punto $A \equiv (1,1)$.
- Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C \equiv (2,3)$ tangente all'asse delle ascisse.
- Dato il cerchio la cui circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 - 5x + 4y - 2 = 0$, stabilire se il punto $Q \equiv (4,1)$ è interno od esterno al cerchio.

2.7- Operazioni elementari su $\Re$.

Sulle operazioni di ***addizione***, di ***sottrazione*** e di ***moltiplicazione*** tra numeri reali, non aggiungiamo altro a quanto introdotto assiomaticamente nel paragrafo **2.1**.

Divisione – La divisione si può introdurre anche come operazione inversa della moltiplicazione, cioè assegnati due numeri reali a e b, si può definire quoziente tra a e b quel numero c (a/b=c) tale che bc = a. Perché la definizione sia ben posta, occorre che esista il risultato e, in molte applicazioni, che questo sia unico. Quindi questa definizione mette in evidenza l'esigenza di porre il divisore $b \neq 0$. Infatti se è $a \neq 0$ e $b = 0$ non esiste un numero c tale che $a/0 = c$, perché non esiste c tale che $c \cdot 0 = a$. Se poi è $a = 0$ e $b = 0$, allora per ogni $c \in \Re$ risulta $c \cdot 0 = 0$ e quindi è indeterminato il risultato dell'operazione 0/0.

Potenza ad esponente intero – Fissato un intero $n \in \mathbb{N}^+$, si chiama "*potenza*" di esponente n l'applicazione da $\Re$ in $\Re$ definita da

$$x^n = \overbrace{xx\cdots x}^{n}.$$

Se è $x \neq 0$, possiamo estendere questa definizione per qualunque intero $z \in \mathbb{Z}$ ponendo

$$x^z = \begin{cases} 1 & ,\ \text{se } z = 0 \\ 1/x^{-z} & ,\ \text{se } z < 0 \end{cases}.$$

ESEMPIO – $2^0 = 1$, $2^3 = 8$, $2^{-3} = 1/8$.

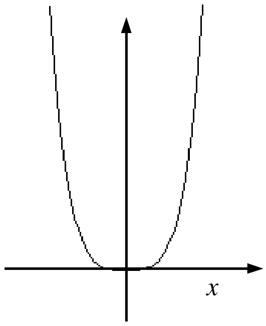
NOTA – Mentre non esiste il numero $1/0^n$ (con $n \in \mathbb{N}^+$), si lascia indeterminata la quantità 0^0.

Dalle definizioni poste risultano immediate le seguenti proprietà (sulle quali non è lecito avere dubbi!):

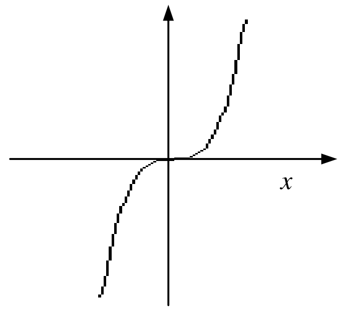
$$\boxed{x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad , \quad x^n : x^m = x^{n-m} \quad , \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m}.}$$

Fissato un intero $n \in \mathbb{N}^+$, mostriamo i grafici (generici) della funzione potenza:

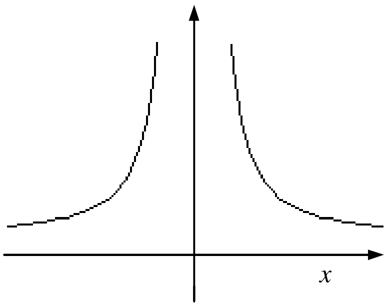
1) $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R},\ f(x) = x^n$ (n pari)



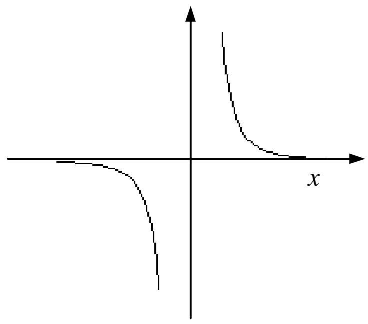
2) $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R},\ f(x) = x^n$ (n dispari)



3) $f : \mathfrak{R}-\{0\} \to \mathfrak{R},\ f(x) = x^{-n}$ (n pari)



4) $f : \mathfrak{R}-\{0\} \to \mathfrak{R},\ f(x) = x^{-n}$ (n dispari)



<u>Radice n-esima</u> – Fissato un intero $n \in \mathbb{N}^+$, si definisce "***radice n-esima***" (o "*radice di indice n*") di un numero $x \in \mathfrak{R}$ ogni numero $y \in \mathfrak{R}$ per cui risulti soddisfatta l'equazione

(*) $$y^n = x.$$

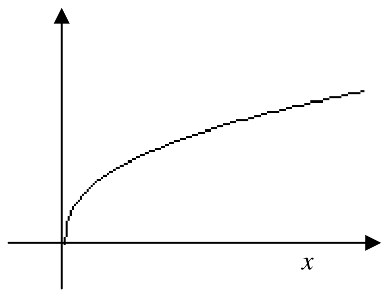
[Al caso $n = 2$ già si è accennato in una nota a pag.13; in generale per n pari vale quanto affermato nella stessa nota e cioè:]

Per n <u>pari</u> l'equazione (*) ha senso soltanto per $x \geq 0$ e si vede facilmente che $y = 0$ è l'unica radice n-esima di 0. Se poi è $x > 0$, la (*) ha un'unica soluzione positiva data da

(**) $$\sqrt[n]{x} = Sup\ \{t \geq 0 \ / \ t^n \leq x\},$$

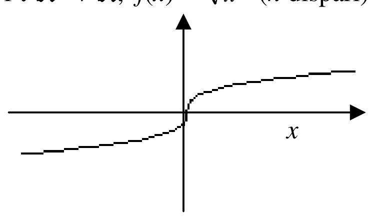
che viene anche chiamata "*radice n-esima aritmetica*" di x. [Essa può essere vista anche come funzione inversa della funzione $g : \mathfrak{R}_0^+ \to \mathfrak{R}_0^+$ definita da $g(y) = y^n$ e il suo (generico) grafico è riportato qui di lato]. Si può notare poi che anche $-\sqrt[n]{x}$ è una radice n-esima di x e quindi in definitiva ogni numero $x > 0$ ammette due radici n-esime di indice pari.

5) $f : \mathfrak{R}_0^+ \to \mathfrak{R}_0^+,\ f(x) = \sqrt[n]{x}$ (n pari)



Per n <u>dispari</u> si può provare che l'equazione (*) ammette per ogni $x \in \mathfrak{R}$ una ed una sola radice n-esima data dalla (**) [che può essere vista come funzione inversa di quella descritta nel grafico n.2].

6) f $: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R},\ f(x) = \sqrt[n]{x}$ (n dispari)



Potenza ad esponente razionale – Ogni numero razionale q si può scrivere nella forma $q = m/n$ con $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{Z}$ e primi tra loro. Noi definiamo "***potenza ad esponente razionale***" $q = m/n$ di x il numero

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}\ ,$$

osservando che questa definizione per n dispari ha sempre senso, mentre per n pari ha senso soltanto se è $x \geq 0$.

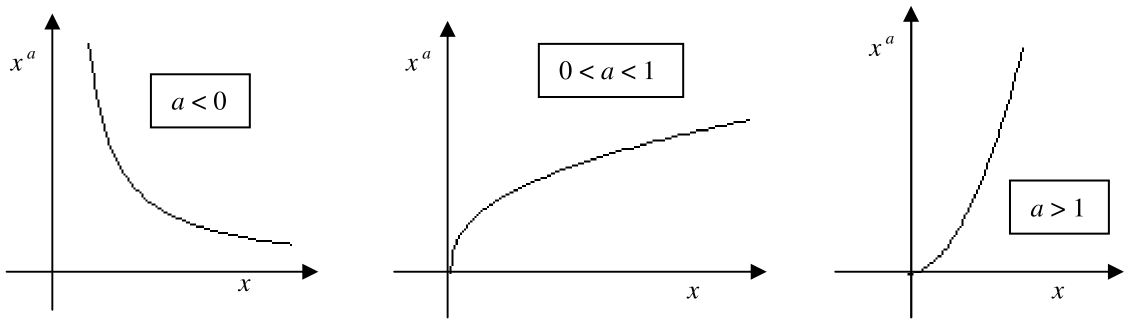
Potenza ad esponente irrazionale – Sia a un numero irrazionale e consideriamo la "*semiretta razionale*": $S_a = \{q \in \mathbb{Q}\ /\ q < a\}$. Se ora fissiamo un numero $x > 0$, definiamo "***potenza ad esponente irrazionale***" a di x il numero:

$$x^a = \begin{cases} \underset{q \in S_a}{Inf}\ x^q\ , & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \underset{q \in S_a}{Sup}\ x^q\ , & \text{se } x \geq 1 \end{cases} .$$

Non ci soffermiamo sulle motivazioni della definizione e sul fatto che questa sia ben posta; è importante comunque sapere che nel caso che a sia un numero razionale e per ogni $x > 0$, questa definizione di potenza coincide con quella ad esponente razionale data in precedenza. E ancora più importante è sapere che continuano a valere le stesse proprietà descritte a pag.18 per la potenza ad esponente intero, cioè

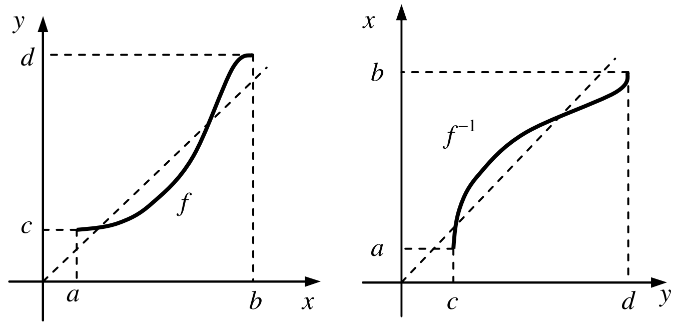
$$\boxed{x^{-a} = 1/x^a\ , \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b}\ , \quad x^a/x^b = x^{a-b}\ , \quad (x^a)^b = x^{ab}.}$$

Abbiamo quindi in particolare definito per ogni fissato $a \in \mathfrak{R}$ l'applicazione $f: \mathfrak{R}^+ \to \mathfrak{R}^+$ chiamata "***potenza***", indicata con $f(x) = x^a$, che è crescente per $a > 0$, decrescente per $a < 0$ e costante (= 1) per $a = 0$.

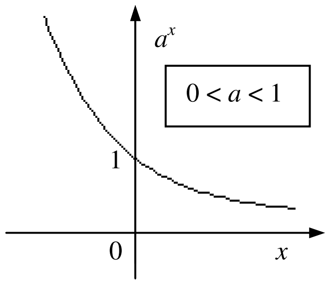


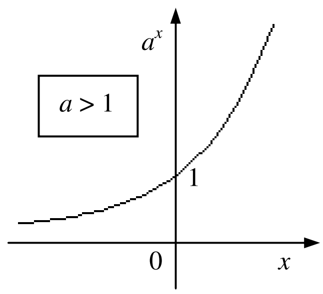
Nel caso in cui è $a \neq 0$, l'applicazione $f(x) = x^a$ stabilisce una biiettività tra $\mathfrak{R}^+$ ed $\mathfrak{R}^+$ e la sua inversa è ancora dello stesso tipo, cioè $f^{-1}(y) = y^{1/a}$.

NOTA – Può essere interessante sapere che data f:$[a,b] \to [c,d]$ biiettiva, il grafico della funzione inversa f^{-1}:$[c,d] \to [a,b]$ è il simmetrico di quello della f rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante. *Manualmente* si può ottenere con una rotazione di 180 gradi intorno alla stessa bisettrice.



Esponenziale – Si chiama "***esponenziale***" l'applicazione $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^+$ definita da $f(x) = a^x$, dove a è un numero fissato con $0 < a \neq 1$ e viene chiamato *base* dell'esponenziale [non si confonda l'esponenziale $f(x) = a^x$ con la potenza $f(x) = x^a$!]. Per ogni base a (con $0 < a \neq 1$), per quanto ricordato nelle potenze ad esponente reale, l'esponenziale ha senso per ogni $x \in \mathfrak{R}$, è sempre positiva ed è monotona crescente se è $a > 1$, mentre è monotona decrescente se è $0 < a < 1$. [Il suo grafico giace tutto nel semipiano delle ordinate positive e passa per il punto (0,1). Riportiamo qui di seguito i grafici (generici) dell'esponenziale. Per esercizio si provi a tracciare (per punti) il grafico dell'esponenziale in base 2. Ciò darà un'idea della crescita rapida verso destra di questa funzione che raddoppia il proprio valore all'aumentare di ogni unità della x, mentre verso sinistra si schiaccia rapidamente verso 0. Si provi poi a tracciare i grafici dell'esponenziale in base 3 e in base 1/2].

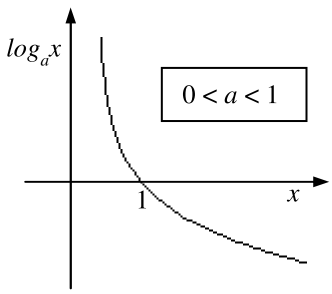




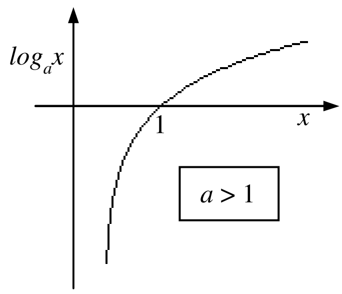
Logaritmo – Fissato un numero a con $0 < a \neq 1$, si definisce "***logaritmo***" in base a l'applicazione $g : \mathfrak{R}^+ \to \mathfrak{R}$ funzione inversa dell'esponenziale in base a. Quindi

!! **il logaritmo in base *a* di un numero *x* > 0 è l'esponente *y* da dare alla base *a* per avere *x* :** $\boldsymbol{log_a x = y \iff a^y = x.}$!!

ESEMPI – $log_a 1 = 0$; $log_a a = 1$; $log_2 8 = 3$; $log_{½} 8 = -3$; $log_{10} 100 = 2$; $log_{10} 1/100 = -2$.



Mostriamo anche qui i grafici del logaritmo sia nel caso $a > 1$, sia nel caso $0 < a < 1$, rimarcando come essi siano contenuti nel semipiano delle ascisse positive e sono manualmente ottenibili da quelli dell'esponenziale (con la stessa base) per simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.



Tra le proprietà del logaritmo, molto importanti e utili nei calcoli, elenchiamo le seguenti:

i) $\forall\, x > 0, y > 0, 0 < a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad log_a (x \cdot y) = log_a x + log_a y$;

ii) $\forall\, x > 0, y > 0, 0 < a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad log_a (x/y) = log_a x - log_a y$;

iii) $\forall\, x > 0, \beta \in \mathfrak{R}, 0 < a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad log_a x^\beta = \beta \cdot log_a x$;

iv) $\forall\, x > 0, 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1 \quad \Rightarrow \quad log_a x = log_b x \,/\, log_b a$.

Dimostriamo la prima di queste relazioni (e per esercizio si provino a dimostrare le altre):

Poniamo $R = log_a (x \cdot y)$, $S = log_a x$, $T = log_a y$. Dalla definizione di logaritmo si ha $x \cdot y = a^R$, $x = a^S$, $y = a^T$. Usando una proprietà delle potenze si ottiene allora $a^R = x \cdot y = a^S \cdot a^T = a^{S+T}$; quindi deve essere $R = S + T$, che è la nostra tesi.

NOTA – Un errore molto frequente nell'usare i logaritmi è quello di usare le loro proprietà dimenticando le ipotesi sotto le quali tali proprietà valgono, ed in particolare l'ipotesi di positività dell'argomento. Ad esempio sono sbagliate le seguenti scritture:

(*)
$$\cancel{log_a[(x-8)(x+4)] = log_a(x-8) + log_a(x+4)}$$
$$\cancel{log_a x^2 = 2\cdot log_a x}$$

infatti ponendo ad esempio $x = -8$ ed $a = 2$, mentre i primi membri delle (*) danno il numero $log_2 64 \equiv 6$, ai secondi membri vengono le espressioni $log_2(-16) + log_2(-4)$ e $2\cdot log_2(-8)$, che non hanno assolutamente senso. Le scritture esatte che devono sostituire le (*) sono le seguenti:

$$log_a[(x-8)(x+4)] = \begin{cases} log_a(x-8) + log_a(x+4), & \text{se } x > 8 \\ log_a(8-x) + log_a(-4-x), & \text{se } x < -4 \end{cases}$$

$$log_a x^2 = 2\cdot log_a |x|$$

e si noti che la prima sussiste per ogni $x < -4$ e per ogni $x > 8$, mentre la seconda sussiste per ogni $x \neq 0$.

IL NUMERO DI EULERO "*e*". Consideriamo l'insieme $A = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,/\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$. Non è difficile provare che questo insieme è limitato inferiormente e che risulta $Min\ A = 2$. Più difficile è provare che A è limitato superiormente (ad esempio da 3) e che il suo estremo superiore, chiamato "***numero di Eulero***" ed indicato con il simbolo "*e*", è un numero irrazionale. La matematica e i computers mettono a disposizione la teoria da una parte e la tecnica dall'altra per approssimare il numero *e* con numeri razionali a lui "*vicini*" quanto si vuole. Le moderne calcolatrici scientifiche danno un valore approssimato di *e*, che coincide con *e* per le prime 8 (oppure 16) cifre decimali. Il numero *e* ha in matematica una grande importanza (un po' come il numero π); in particolare viene usato come base del logaritmo e dell'esponenziale per le particolari proprietà differenziali che queste funzioni assumono con questa base. Ricordiamo che è

$$e = 2{,}7182818285\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La formula iv) di pagina precedente è nota come "*formula di cambiamento di base*" per i logaritmi ed è particolarmente utile quando occorre calcolare il logaritmo di un numero positivo x in una base a $(0 < a \neq 1)$ sconosciuta alle nostra tavole logaritmiche o alla nostra calcolatrice (in verità le tavole logaritmiche non esistono più in commercio e le moderne calcolatrici scientifiche calcolano o meglio approssimano i logaritmi in una qualunque base, ma la formula resta comunque utile in svariate situazioni di calcolo), mentre invece abbiamo a disposizione la valutazione dei logaritmi in una base b $(0 < b \neq 1)$. Le (vecchie) tavole logaritmiche e le piccole calcolatrici da tavolo mettono a disposizione il calcolo dei logaritmi in base *e* (chiamati "***logaritmi naturali***" e indicati con il semplice simbolo ***log x***, cioè si omette la base), oppure in base 10 (chiamati "***logaritmi decimali***" e indicati con il simbolo ***Log x***).

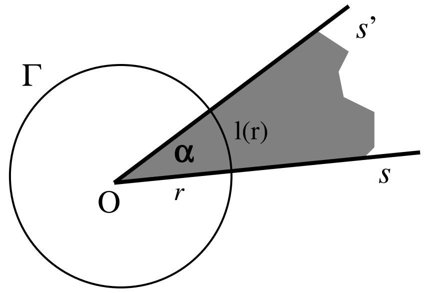
ESEMPI di utilizzazione della formula di cambiamento di base:

$$log_{1000}(1/100) = \frac{Log(1/100)}{Log 1000} = -\frac{2}{3}\ ;$$

$$Log\ e = \frac{1}{log 10} \qquad \text{(in generale } log_a b = \frac{1}{log_b a}\text{).}$$

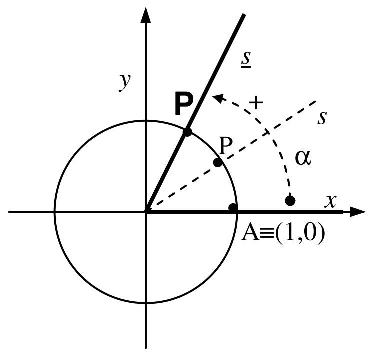
3 – CENNI DI TRIGONOMETRIA

3.1- Angoli.



Fissato un piano π, si chiama "***angolo***" la parte α di piano compresa tra due semirette s ed s' su π uscenti dallo stesso punto O. Naturalmente ogni coppia di semirette siffatte individua due angoli (chiamati *esplementari*) e bisogna indicare quale dei due si intende fissare. I più usati sistemi di misurazione degli angoli sono quelli in *gradi* ed in *radianti*. Ricordiamo che un angolo misura un grado se esso è la trecentosessantesima parte dell'angolo giro, cioè dell'angolo non nullo individuato da due semirette sovrapposte [per individuare un angolo di un grado, teoricamente si procede così: si traccia una circonferenza con il centro in O e si posizionano le due semirette s ed s' in modo che stacchino sulla circonferenza un arco che abbia una misura $l(r)$ pari alla trecentosessantesima parte dell'intera circonferenza].

Per il sistema di misurazione di un angolo α in radianti, si procede nel seguente modo [analogo a quello precedente]: si considera una circonferenza Γ di centro O e raggio r ; se $l(r)$ indica la lunghezza dell'arco dato dall'intersezione di α con Γ, si definisce "***ampiezza assoluta***" in radianti dell'angolo α il rapporto $l(r)/r$. [Si può provare che tale rapporto non dipende dal raggio r di Γ in quanto la lunghezza $l(r)$ dell'arco è proporzionale ad r. E' anche bene notare che i radianti sono *numeri puri*, in quanto rapporto di lunghezze. Ricordiamo che l'angolo giro misura in radianti 2π (dove π è il numero irrazionale dato da $\pi = 3{,}141592654\ldots\ldots$), mentre un angolo di un radiante ha un'ampiezza in gradi di poco superiore a 57 gradi. Si noti infine che se $\alpha°$ e α_R indicano le misure in gradi e in radianti risp. di un angolo, risulta $\alpha_R = \pi\cdot\alpha°/180°$.]



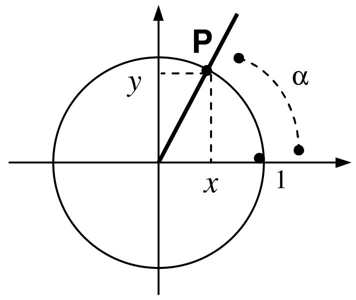
In molte applicazioni è conveniente estendere la definizione di angolo anche a quelli di ampiezza superiore a 2π e a quelli di ampiezza negativa (angoli orientati). Per fare questo fissiamo un sistema di assi cartesiani Oxy e la circonferenza Γ di centro l'origine O e raggio 1 (detta "*goniometrica*" e di equazione $x^2 + y^2 = 1$). Il semiasse positivo delle ascisse verrà chiamato "***origine degli angoli***", mentre il punto $A\equiv(1,0)$ verrà chiamato "***origine degli archi***". Si immagini ora di far ruotare in senso orario, oppure in senso antiorario, una semiretta s uscente dall'origine O, inizialmente sovrapposta all'origine degli angoli, fino a raggiungere una fissata posizione $\underline{s}$. Nello stesso tempo, se P indica il punto di intersezione di s con Γ, questo punto P, partendo dalla posizione A, descrive un arco su Γ (eventualmente compiendo più giri) fino a raggiungere il punto $\underline{P}$ (estremo dell'arco $\overset{\frown}{A\underline{P}}$), intersezione di $\underline{s}$ con Γ. Definiamo allora "***ampiezza assoluta***" (in radianti) dell'angolo α, così individuato dall'asse delle ascisse e dalla semiretta $\underline{s}$, la lunghezza dell'arco percorso da P, e cioè $\gamma + 2n\pi$, dove n è il numero delle successive sovrapposizioni di s con l'origine degli angoli (o di P con A) e γ è la misura assoluta dell'angolo che si è formato fra l'origine degli angoli e la semiretta $\underline{s}$ dopo l'ultima sovrapposizione (di s con l'origine degli angoli stessa). Infine, dato un angolo α individuato nel modo appena descritto, si chiama "***ampiezza***" (relativa, in radianti) di α la sua ampiezza assoluta se la rotazione della semiretta s è avvenuta in senso antiorario; il suo opposto $(-\gamma - 2n\pi)$ se la rotazione è avvenuta in senso orario [il considerare positive le rotazioni antiorarie è la convenzione più diffusa].

Si è così stabilita una corrispondenza biiettiva tra i numeri reali e gli angoli generati dalle rotazioni descritte in precedenza, nel senso che ogni numero reale α individua uno ed un solo arco $\overset{\frown}{A\underline{P}}$ su Γ (con origine A) di lunghezza relativa α e questo individua uno ed un solo angolo di ampiezza α; viceversa ogni angolo (con la sua ampiezza) individua uno ed un solo numero reale. In seguito identificheremo un angolo con la sua ampiezza o con la lunghezza dell'arco ad esso associato (un po' come è avvenuto tra i numeri reali e i punti della retta reale), cioè con "*angolo* α" o "*arco* α" intenderemo un angolo di ampiezza α ed anche un arco (su Γ) di lunghezza α. Questo consente in particolare di parlare in modo naturale di somma o di differenza di angoli.

Osserviamo infine che ogni punto $\underline{P}$ sulla circonferenza goniometrica Γ individua infiniti archi o angoli; infatti se α è l'arco su Γ descritto (ad esempio in senso antiorario) da un punto P "*partito*" dal punto A e che ha "*raggiunto*" il punto $\underline{P}$ senza ripassare per A, oltre ad α il punto $\underline{P}$ individua anche tutti gli angoli di ampiezza $\alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, cioè ottenuti facendo compiere a P preventivamente $|k|$ giri su Γ (in senso orario o antiorario a seconda del segno di k) prima di "*fermarsi*" su $\underline{P}$.

3.2- <u>Funzioni trigonometriche</u>.

In un sistema cartesiano di riferimento Oxy, consideriamo la circonferenza goniometrica Γ. Ogni numero reale α, individua su Γ uno ed un solo punto $P \equiv (x,y)$ estremo dell'arco α. Possiamo quindi per ogni $\alpha \in \mathfrak{R}$ definire le applicazioni "***seno***" e "***coseno***" per mezzo delle leggi



$$sen\ \alpha = y \quad , \quad cos\ \alpha = x.$$

Per ogni $\alpha \in \mathfrak{R}$ risulta $|sen\ \alpha| \le 1$ e $|cos\ \alpha| \le 1$ e per il Teorema di Pitagora si ha (!):

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1.}$$

Immediatamente si può riscontrare la validità delle seguenti formule [sono molte le regole e formule che si possono ricavare dalle semplici definizioni di *seno* e *coseno* di un angolo; qui di seguito ne elenchiamo soltanto alcune come esempio e che non vanno assolutamente imparate a memoria, ma verificate e riscontrate graficamente con lo scopo di impadronirsene in modo semplice e naturale]:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = sen(\alpha + 2\pi) \\ cos\ \alpha = cos(\alpha + 2\pi) \end{array}\right\}$$ [Le funzioni *seno* e *coseno* sono periodiche di periodo 2π.]

$$sen\ \alpha = -sen(-\alpha) = sen(\pi - \alpha) = -sen(\pi + \alpha)\ ;$$

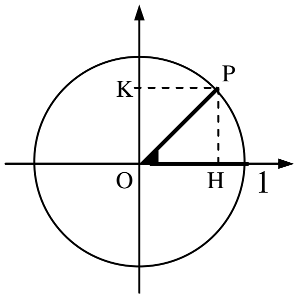
$$cos\ \alpha = cos(-\alpha) = -cos(\pi - \alpha) = -cos(\pi + \alpha)\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = cos(\pi/2 - \alpha) \\ cos\ \alpha = sen(\pi/2 - \alpha) \end{array}\right\}$$ [Angoli *complementari* hanno il *seno* dell'uno uguale al *coseno* dell'altro.]

$$sen\ 0 = cos\ \pi/2 = \text{sen}\ \pi = cos\ 3\pi/2 = 0 \ ;\ cos\ 0 = sen\ \pi/2 = 1 \ ;\ cos\ \pi = sen\ 3\pi/2 = -1;$$

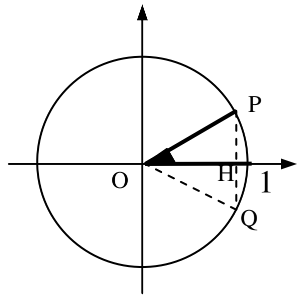
$$sen\ \alpha = -cos(\alpha + \pi/2) \quad ; \quad cos\ \alpha = sen(\alpha + \pi/2)\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

DUE ANGOLI PARTICOLARI - Ci riferiamo agli angoli $\pi/4$ e $\pi/6$ (che corrispondono a $45°$ e $30°$ rispettivamente). Se nella figura qui a sinistra si nota che *sen* $\pi/4$ e *cos* $\pi/4$ equivalgono ai lati OK e OH di un quadrato che ha diagonale $\overline{OP} = 1$, si ha subito



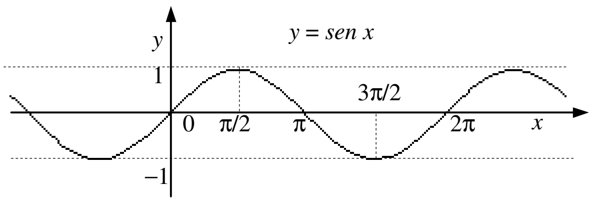
$$sen\frac{\pi}{4} = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

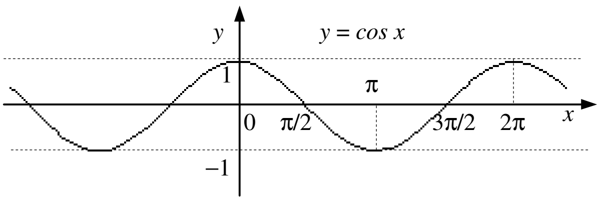
Se nella figura qui a destra si nota che *sen* $\pi/6$ e *cos* $\pi/6$ equivalgono rispettivamente alla mezza base HP e all'altezza OH di un triangolo equilatero OPQ di lato 1, si ha immediatamente (anche per il Teorema di Pitagora):



$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le funzioni *seno* e *coseno* (per loro definizione) esistono su tutto l'asse reale e i loro grafici possono essere disegnati in un sistema di assi cartesiani O*xy*. Gli stessi grafici (vedi le figure qui a sinistra) evidenziano la periodicità delle funzioni, che esse hanno per codominio l'intervallo $[-1,1]$ e che il grafico della funzione *coseno* risulta "*sfasato*" di $\pi/2$ rispetto a quello della funzione *seno*, cioè si può ottenere da quello con una traslazione di $\pi/2$ dell'asse delle ascisse; in altre parole risulta $cos\, x = sen(x + \pi/2)$.

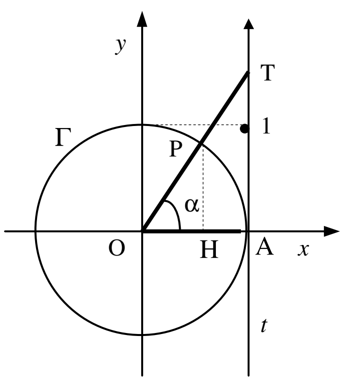




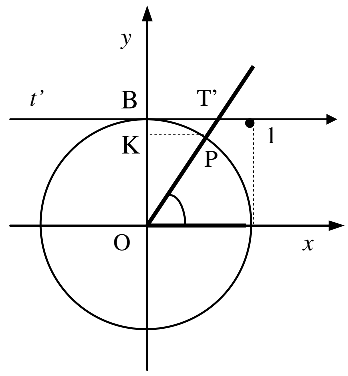
Definiamo ora le funzioni reali "***tangente***" e "***cotangente***" nel seguente modo:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \qquad , \qquad ctg\,\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

Perché queste definizioni abbiano senso, occorre che i denominatori non siano nulli e quindi $tg\,\alpha$ è definita per ogni $\alpha \in \Re$ con $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, mentre $ctg\,\alpha$ è definita per ogni $\alpha \in \Re$ con $\alpha \neq k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.



Come per le funzioni *seno* e *coseno*, anche per la *tangente* e la *cotangente* è possibile darne una rappresentazione geometrica per mezzo della circonferenza goniometrica. Con riferimento alla figura qui a sinistra, disegnate nel sistema di riferimento O*xy* la circonferenza goniometrica Γ, la retta t tangente a Γ nel punto A origine degli archi e un angolo α ($\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$), si noti che i triangoli OHP e OAT sono simili e si può scrivere TA : OA = PH : OH. Si noti anche che il segmento OA è lungo 1, mentre i segmenti PH e HO rappresentano (con le loro lunghezze relative) $sen\alpha$ e $cos\alpha$. Se allora si immagina la retta t come un asse con lo stesso orientamento e la stessa unità di misura dell'asse delle ordinate (ed origine in A), la coordinata di T su t è esattamente $tg\alpha$.



In modo analogo è possibile rappresentare $ctg\,\alpha$ su un asse reale t' (con lo stesso orientamento e con la stessa unità di misura dell'asse delle ascisse) disegnato in modo tangente alla circonferenza Γ nel punto $B\equiv(0,1)$. Con riferimento alla figura qui a destra, la coordinata di T' su t' (di origine B) è esattamente $ctg\,\alpha$.

Dalle formule valide per il *seno* e per il *coseno* (elencate a pag.24) e dalle definizioni di *tangente* e *cotangente*, si deducono (e si provino per esercizio) le seguenti:

$tg\,\alpha = -\,tg(-\alpha) = -\,tg(\pi-\alpha)$;
$ctg\,\alpha = -\,ctg(-\alpha) = -\,ctg(\pi-\alpha)$;

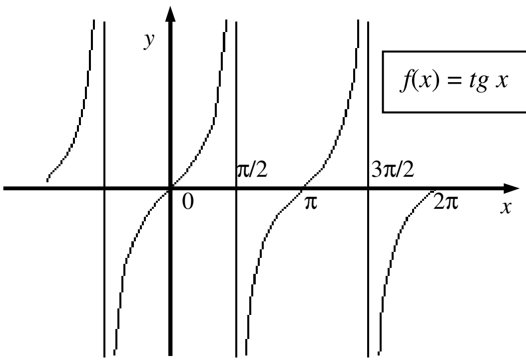
$tg\,\alpha = 1/\,ctg\,\alpha$;

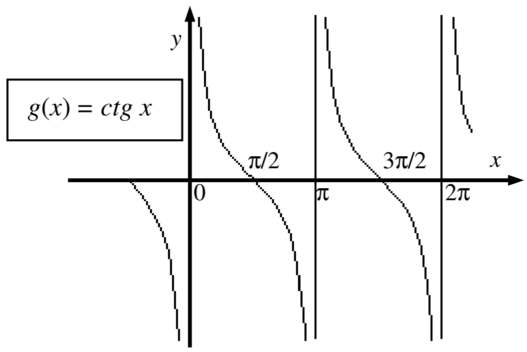
$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = tg(\alpha+\pi) \\ ctg\,\alpha = ctg(\pi+\alpha) \end{array}\right\}$$ [Le funzioni *tangente* e *cotangente* sono periodiche di periodo π.]

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = ctg(\pi/2-\alpha) \\ ctg\,\alpha = tg(\pi/2-\alpha) \end{array}\right\}$$ [Angoli complementari hanno la *tangente* dell'uno uguale alla *cotangente* dell'altro.]

$tg\,0 = ctg\,\pi/2 = tg\,\pi = ctg\,3\pi/2 = 0$; $tg\,\pi/4 = ctg\,\pi/4 = 1$; $tg\,\pi/6 = \sqrt{3}/3$; $ctg\,\pi/6 = \sqrt{3}$.

Tracciamo qui di seguito in un sistema di assi cartesiani O*xy* i grafici delle funzioni $f(x) = tg\,x$ con $f: \mathfrak{R}-\{k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\}\to\mathfrak{R}$ e $g(x) = ctg\,x$ con $g: \mathfrak{R}-\{\pi/2+k\pi \,/\, \pi\in\mathbb{Z}\}\to\mathfrak{R}$ (mettendo in evidenza i loro *asintoti verticali*), notando la loro periodicità ed il fatto che hanno per codominio tutto l'asse reale $\mathfrak{R}$:





Dalla identità $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ si ottiene $sen^2\alpha = \dfrac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha+cos^2\alpha} = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{1}{1+ctg^2\alpha}$ e $cos^2\alpha = \dfrac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha+cos^2\alpha} = \dfrac{1}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}$. Da queste osservazioni si deducono immediatamente le seguenti formule di trasformazione (scritte per i valori di α per cui esistono *tangente* e *cotangente* e dove la scelta del segno dipende dalla positività o negatività delle funzioni calcolate in α):

$sen\,\alpha = \pm\sqrt{1-cos^2\alpha} = \dfrac{\pm\, tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$cos\,\alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\alpha} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{\pm\, ctg\,\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$
$tg\,\alpha = \dfrac{\pm sen\,\alpha}{\sqrt{1-sen^2\alpha}} = \dfrac{\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}}{cos\,\alpha} = \dfrac{1}{ctg\,\alpha}$	$ctg\,\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{1-sen^2\alpha}}{sen\,\alpha} = \dfrac{\pm cos\,\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}} = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$

3.3- **Formule goniometriche**.

Elenchiamo qui di seguito le principali formule goniometriche, ricordando soltanto che mentre la prima formula di addizione ha una dimostrazione geometrica, tutte le altre sono conseguenza più o meno diretta di quella.

FORMULE DI ADDIZIONE.

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot cos\beta + sen\beta\cdot cos\alpha \quad ; \quad cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\cdot cos\beta - sen\beta\cdot sen\,\alpha \quad ; \quad tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cdot cos\beta - sen\beta\cdot cos\alpha \quad ; \quad cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\cdot cos\beta + sen\beta\cdot sen\,\alpha \quad ; \quad tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE.

$$sen2\alpha = 2\,sen\alpha\,cos\alpha \quad ; \quad cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha \quad ; \quad tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$$

FORMULE DI BISEZIONE.

$$sen\alpha = \mp\sqrt{\frac{1-cos\,2\alpha}{2}} \quad ; \quad cos\alpha = \mp\sqrt{\frac{1+cos\,2\alpha}{2}} \quad ; \quad tg\,\alpha = \mp\sqrt{\frac{1-cos\,2\alpha}{1+cos\,2\alpha}}$$

FORMULE PARAMETRICHE.

$$sen2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\,\alpha} \quad ; \quad cos2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\,\alpha} \quad ; \quad tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}$$

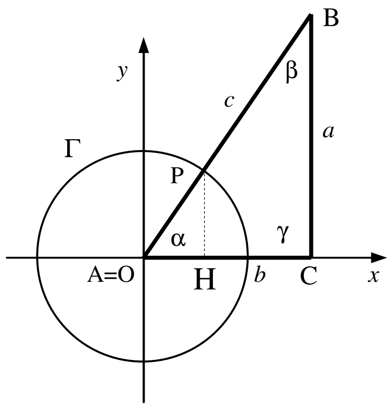
FORMULE DI PROSTAFERESI.

$$sen\alpha + sen\beta = 2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ; \quad cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sen\alpha - sen\beta = 2\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}\,cos\frac{\alpha+\beta}{2} \quad ; \quad cos\,\alpha - cos\,\beta = -\,2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\,sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$

3.4- **Trigonometria dei triangoli rettangoli**.

Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AB. Poniamo $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\alpha = B\hat{A}C$, $\beta = A\hat{B}C$, $\gamma = A\hat{C}B = \pi/2$. Si immagini di fissare un sistema di assi cartesiani Oxy con O coincidente con A, il cateto AC sovrapposto ad un segmento del semiasse positivo delle ascisse ed il punto B nel 1° quadrante. Si consideri poi il cerchio goniometrico Γ (con centro in O), si indichi con P l'intersezione di Γ con la semiretta di origine A e passante per B e si indichi con H la proiezione di P sull'asse delle ascisse. Così P è l'estremo dell'arco α. Dalla similitudine dei triangoli ABC e OPH si può scrivere:

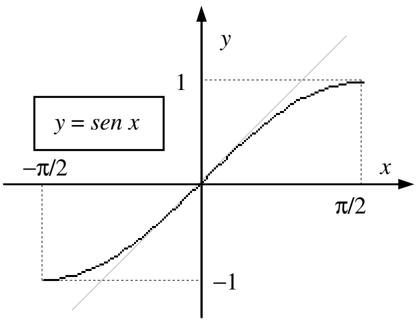


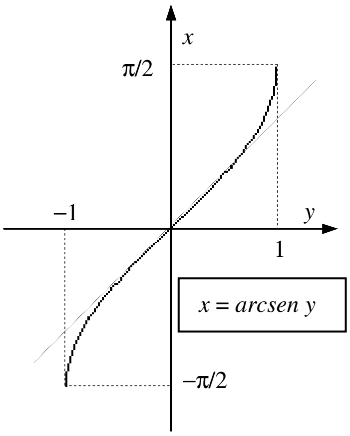
$$\begin{aligned} BC : AB &= PH : OP \\ AC : AB &= OH : OP \\ BC : AC &= PH : OH \end{aligned} \qquad \text{e quindi} \qquad \boxed{\begin{aligned} a &= c\cdot sen\,\alpha \\ b &= c\cdot cos\,\alpha \\ a/b &= tg\,\alpha \end{aligned}}$$

Queste formule (particolarmente utili in svariate situazioni) affermano quindi che in un triangolo rettangolo un cateto ha la lunghezza pari a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il *seno* dell'angolo opposto (allo stesso cateto); oppure un cateto ha la lunghezza pari a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il *coseno* dell'angolo adiacente non retto; infine il rapporto fra le lunghezze dei due cateti è uguale alla *tangente* dell'angolo opposto al primo cateto.

3.5- Funzioni goniometriche inverse.

Le funzioni *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente* definite nel loro campo di esistenza non sono iniettive (basti pensare che sono periodiche). Ma se si assume come loro dominio un insieme in cui sono iniettive e come insieme di arrivo il loro codominio, allora, essendo biiettive, è possibile considerare le loro funzioni inverse.





Si definisce "***arcoseno***" la funzione inversa della

$f: [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$

definita da $f(x) = sen\ x$ (che è monotòna crescente) e cioè

$f^{-1}: [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$,

definita da $f^{-1}(y) = arcsen\ y$, che associa ad ogni $y\in[-1,1]$ quello e quel solo angolo $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ il cui *seno* è y.

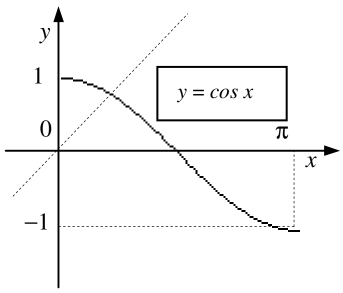
Si definisce "***arcocoseno***" la funzione inversa della funzione

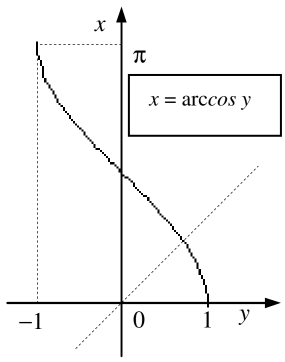
$f: [0,\pi] \to [-1,1]$

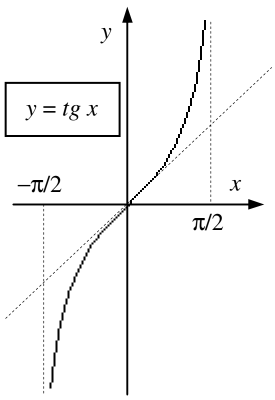
definita da $f(x) = cos\ x$ (che è monotòna decrescente) e quindi è

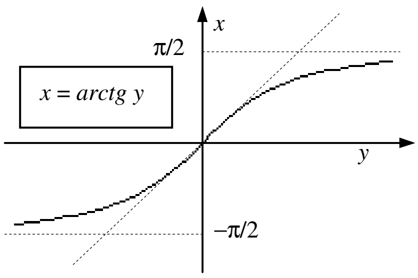
$f^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$

definita da $f^{-1}(y) = arccos\ y$, che associa ad ogni $y\in[-1,1]$ quell'angolo $x \in [0,\pi]$ il cui *coseno* è y.









Si definisce "***arcotangente***" la funzione inversa della funzione

$f:]-\pi/2,\pi/2[\to \Re$

definita da $f(x) = tg\ x$ (che è monotòna crescente) e quindi è

$f^{-1}: \Re \to]-\pi/2,\pi/2[$

definita da $f^{-1}(y) = arctg\ y$, che associa ad ogni $y \in \Re$ quel solo angolo $x\in]-\pi/2,\pi/2[$ la cui *tangente* è x.

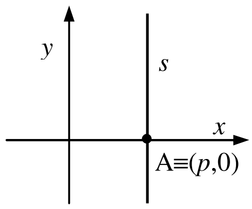
Si definisce "***arcocotangente***" la funzione inversa della funzione $f:]0,\pi[\to \Re$ definita da $f(x) = ctg\ x$ (che è monotona decrescente) e quindi risulta $f^{-1}(y): \Re \to]0,\pi[$ definita da $f^{-1}(y) = arcctg\ y$ che associa ad ogni $y \in \Re$ quell'angolo $x \in]0,\pi[$ la cui *cotangente* è x. Si lascia al lettore il *pensare* al grafico della funzione *arcocotangente*.

NOTA – Naturalmente le funzioni *seno*, *tangente*, *coseno*, *cotangente* potevano essere invertite anche in intervalli diversi da quelli qui proposti. Ma per convenzione, per *arcoseno*, *arcotangente*, *arcocoseno*, *arcocotangente* si intendono proprio le funzioni da noi introdotte, e cioè le funzioni inverse del *seno* e della *tangente* definite tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ e del *coseno* e della *cotangente* tra 0 e π.

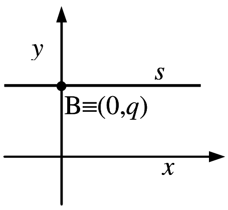
ESEMPI : $arcsen(-1/2) = -\pi/6$; $arccos(1/2) = \pi/3$; $arctg(-\sqrt{3}) = -\pi/3$; $arcctg(-1) = 3\pi/4$.

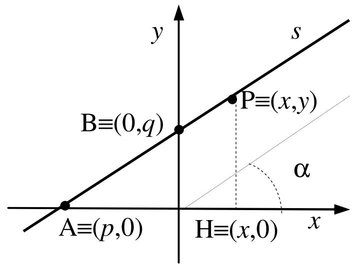
4 – RETTE E PARABOLE

4.1- Equazione della retta.



Si consideri in un piano cartesiano Oxy una retta s. Se la retta s è parallela all'asse delle ordinate, essa interseca l'asse delle ascisse in un punto $A \equiv (p,0)$. L'insieme dei suoi punti è pienamente descritto da $\{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x = p,\, y \in \Re\}$. L'espressione $\boldsymbol{x = p}$ si chiama equazione di una tale retta. Analogamente se la retta s è parallela all'asse delle ascisse, essa interseca l'asse delle ordinate in un punto $B \equiv (0,q)$ e l'insieme dei suoi punti è dato da $\{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x \in \Re,\, y = q\}$. L'espressione $\boldsymbol{y = q}$ si chiama equazione di una tale retta. Sia ora s una retta non parallela ad alcuno dei due assi cartesiani; siano $A\equiv(p,0)$ e $B\equiv(0,q)$ rispettivamente le intersezioni di s con l'asse delle ascisse e con l'asse delle ordinate [i due punti possono anche coincidere] e indichiamo con $\alpha \in \,]-\pi/2,\pi/2[-\{0\}$ l'angolo di cui deve ruotare intorno all'origine una semiretta sovrapposta al semiasse positivo delle ascisse per raggiungere una posizione parallela a quella di s. Se ora $P \equiv (x,y)$ è un generico punto della retta s (diverso da A), le sue coordinate sono legate da un ben preciso vincolo: infatti se $H \equiv (x,0)$ è la proiezione di P sull'asse delle ascisse, il triangolo AHP è rettangolo e quindi risulta $tg\,\alpha = y/(x-p)$ [Va notato che questa relazione è indipendente dal valore di $\alpha \in \,]-\pi/2,\pi/2[-\{0\}$ e dalla posizione di P sulla retta s]. Quindi l'insieme dei punti di s (compreso il punto A) è descritto da $\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, y = x\cdot tg\,\alpha - p\cdot tg\,\alpha\}$. Posto $m = tg\,\alpha$ e risultando $q = -p\cdot tg\,\alpha$, l'equazione della retta s (in forma esplicita) è data da



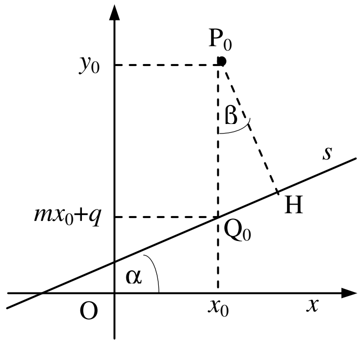


$$\boldsymbol{y = mx + q}.$$

Il coefficiente m viene chiamato "***coefficiente angolare***" della retta e come si è visto rappresenta la *tangente trigonometrica* dell'angolo α sopra descritto [e si noti che l'equazione è valida anche per $\alpha = 0$, ritornando in questo caso l'equazione di una retta parallela all'asse delle ascisse], mentre q, detto "***termine noto***", rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta s con l'asse delle ordinate. Quindi nel piano cartesiano Oxy ogni retta non parallela all'asse delle ordinate è il grafico di una funzione $f : \Re \to \Re$ definita da $f(x) = mx + q$. Viceversa, data la funzione $f : \Re \to \Re$ definita da $f(x) = mx + q$, si può provare facilmente che i punti del suo grafico $\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x\in\Re,\, y = mx + q\}$ sono a tre a tre allineati e quindi costituiscono una retta. Più precisamente, se è $m > 0$, la f è monotòna crescente e la retta grafico di f forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo $\alpha = arctg\; m \in \,]0,\pi/2[$; se è $m < 0$, la f è monotòna decrescente e la retta grafico di f forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo $\alpha \in \,]-\pi/2,0[$; se è $m = 0$, la f è costante e la retta grafico di f è parallela all'asse delle ascisse.

4.2- Distanza di un punto da una retta.

Assegnati in un piano cartesiano Oxy una retta s ed un punto $P_0\equiv(x_0,y_0)$, si definisce distanza $d(P_0,s)$ di P_0 da s la lunghezza del segmento P_0H, dove H è il piede della perpendicolare condotta ad s da P_0. Se la retta s è parallela all'asse delle ordinate e quindi di equazione $x = p$, è immediato notare che è $d(P_0,s) = |\, x_0 - p|$.



Sia la retta s non parallela all'asse delle ordinate di equazione $y = m\,x + q$; indichiamo con H il piede della perpendicolare condotta da P_0 alla s, con $Q_0 \equiv (x_0, mx_0+q)$ l'intersezione tra la retta s e la retta "*verticale*" di equazione $x = x_0$ ed infine con α l'*arcotangente* di m. Del triangolo P_0Q_0H, rettangolo in H, sono noti l'ipotenusa $\overline{P_0Q_0} = |\, y_0 - mx_0 - q \,|$ e l'angolo β in P_0 in quanto è $\beta = |\alpha|$. Dalle proprietà trigonometriche dei triangoli rettangoli, risulta

$$d(P_0,s) = \overline{P_0H} = \overline{P_0Q_0}\, cos\beta = \overline{P_0Q_0}\, cos\alpha = \frac{\overline{P_0Q_0}}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

4.3- Retta per due punti.

E' noto dalla geometria euclidea che per due punti distinti passa una ed una sola retta. Siano $P_1 \equiv (x_1,y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2,y_2)$ due punti distinti nel piano cartesiano Oxy. Se è $x_1 = x_2$ è ovvio che la retta s passante per P_1 e P_2 è "*verticale*" ed ha equazione $x = x_1$. Se è $x_1 \neq x_2$, la retta s di equazione generica $y = mx + q$ passa per P_1 e P_2 se e solo se i parametri m e q sono legati dalle espressioni $y_1 = mx_1 + q$ e $y_2 = mx_2 + q$, cioè deve essere $q = y_1 - mx_1$ e quindi $y_2 = mx_2 + y_1 - mx_1$. Si deve avere allora

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{e} \qquad q = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x_1 ,$$

cioè l'equazione della retta s è data da

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x_1 ,$$

che, se è $y_1 \neq y_2$, assume la forma più nota

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.}$$

4.4- Fascio di rette per un punto.

Fissato un punto $P_0 \equiv (x_0,y_0)$ nel piano Oxy, ogni retta non "*verticale*" di equazione generica $y = mx + q$ passante per P_0 deve avere i coefficienti m e q legati dalla espressione $y_0 = mx_0 + q$, cioè $q = y_0 - mx_0$. Quindi l'espressione

$$\boxed{y = m(x - x_0) + y_0}$$

descrive, al variare di m in $\mathfrak{R}$, la totalità delle rette passanti per P_0, ad esclusione di quella "*verticale*" di equazione $x = x_0$.

4.5- Intersezione e parallelismo tra rette.

Limitiamo la descrizione al caso di rette non "*verticali*". Siano s ed r due rette nel piano Oxy di equazioni $y = mx + q$ e $y = nx + p$ rispettivamente. L'intersezione tra le due rette non è vuota se e solo se esiste un punto $P_0 \equiv (x_0,y_0)$ le cui coordinate soddisfino entrambe le equazioni, cioè per cui si abbia $y_0 = mx_0 + q$ e $y_0 = nx_0 + p$. L'ascissa x_0 deve quindi soddisfare all'uguaglianza $mx_0 + q = nx_0 + p$, cioè deve soddisfare all'equazione di 1° grado

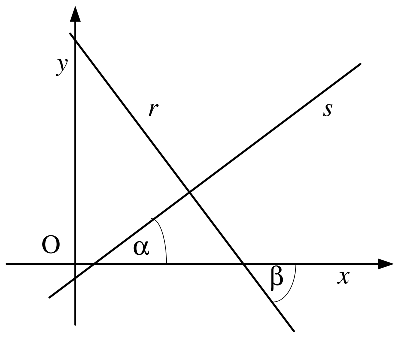
(*) $$(m - n)\, x_0 = p - q.$$

Se è $m \neq n$, si ottiene $x_0 = (p - q) / (m - n)$ e quindi risulta $P_0 \equiv \left(\frac{p - q}{m - n}, \frac{mp - nq}{m - n} \right)$. Se è $m = n$ e $p = q$, la (*) è soddisfatta per ogni $x_0 \in \Re$, e ciò è ovvio essendo $s = r$. Se è $m = n$ e $p \neq q$, la (*) non dà alcuna soluzione e quindi s ed r sono parallele. Viceversa se due rette distinte s ed r sono parallele, la (*) non deve dare soluzioni e quindi deve essere $m = n$ e $p \neq q$. In definitiva possiamo affermare che nel piano Oxy

due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

4.6- Rette perpendicolari.

Sia s una retta non "*verticale*" nel piano Oxy di equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$ e poniamo $\alpha = arctg\ m$. Se r, di equazione $y = nx + p$, è una retta perpendicolare alla s, posto $\beta = arctg\ n$, risulta



$$\beta = \begin{cases} \alpha - \pi/2, & \text{se } \alpha > 0 \\ \alpha + \pi/2, & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Quindi se è $\alpha > 0$, si ha

$$n = tg\ \beta = tg(\alpha - \pi/2) = \frac{sen(\alpha - \pi/2)}{cos(\alpha - \pi/2)} = \frac{-cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{-1}{tg\alpha} = -\frac{1}{m};$$

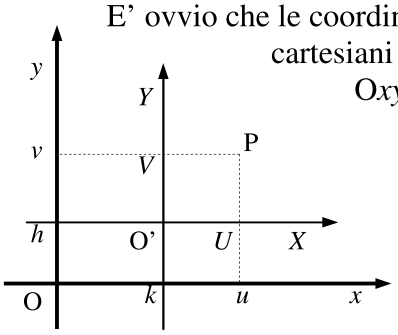
se è $\alpha < 0$, si ha

$$n = tg\ \beta = tg(\alpha + \pi/2) = \frac{sen(\alpha + \pi/2)}{cos(\alpha + \pi/2)} = \frac{cos\alpha}{-sen\alpha} = \frac{-1}{tg\alpha} = -\frac{1}{m}.$$

In ogni caso, se la retta r è perpendicolare alla s, si ha $\boldsymbol{n = -1/m}$. Viceversa si può provare (e per esercizio si pensi come) che assegnate nel piano Oxy due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = (-1/m)x + p$, esse sono tra loro perpendicolari. Ricapitolando,

due rette sono tra loro perpendicolari se e solo se il coefficiente angolare dell'una è l'opposto del reciproco dell'altra.

4.7- Traslazioni degli assi.

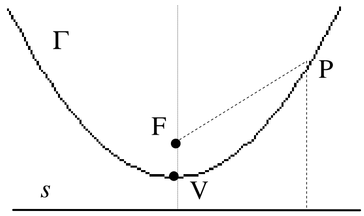


E' ovvio che le coordinate di un punto P in un piano dipendono dal sistema di assi cartesiani scelto nel piano stesso. Fissati due sistemi di assi cartesiani Oxy e O'XY (con gli assi a due a due paralleli e concordi nell'orientamento), il punto O' avrà delle coordinate (k,h) in generale non nulle nel sistema Oxy. [Anche se ciò è banale, osserviamo che se è $h > 0$, allora O' si trova al di sopra dell'asse delle x, mentre se è $h < 0$, allora O' si trova al di sotto dell'asse delle x.] Allora un punto P di coordinate (U,V) nel sistema O'XY avrà nel sistema Oxy coordinate $(u,v) = (U + k\ , V + h)$.

Le formule di traslazione sono quindi le seguenti:

$$\begin{cases} x = X + k \\ y = Y + h \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X = x - k \\ Y = y - h \end{cases}$$

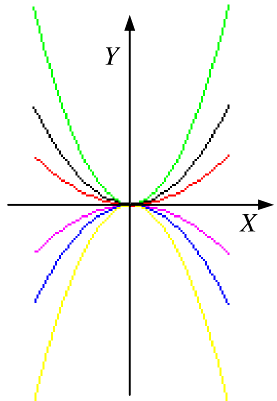
4.8- Parabole.



Si definisce "***parabola*** " (in un piano) il luogo geometrico Γ dei punti P che sono equidistanti da una fissata retta s (chiamata "***direttrice***") e da un fissato punto $\mathrm{F} \notin s$ (chiamato "***fuoco***"), cioè i punti P per cui si abbia $d(\mathrm{P},s) = d(\mathrm{P},\mathrm{F})$. La retta perpendicolare alla *direttrice* e passante per il *fuoco* viene chiamata "***asse di simmetria***" della parabola, mentre il punto medio tra F ed il punto di intersezione di s con tale asse si chiama "***vertice***" della parabola. Se la parabola è disegnata in un sistema di assi cartesiani a partire da una direttrice s di equazione $y = mx + q$ e da un fuoco $\mathrm{F}\equiv(u,v)$, l'espressione $d(\mathrm{P},s) = d(\mathrm{P},\mathrm{F})$ (che è chiamata "***equazione della parabola***") assume la seguente forma (dove si è posto $\mathrm{P}\equiv(x,y)$)

(•) $$\frac{|y - mx - q|}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}\ .$$

Per gli scopi che ci siamo prefissi, vogliamo esaminare soltanto quelle parabole che possono essere interpretate come grafici di funzioni $y = f(x)$, e cioè che hanno come asse di simmetria una retta parallela all'asse delle ordinate. Per fare ciò è conveniente esaminare, tra queste, quelle che in particolare hanno il vertice nell'origine e poi introdurre le altre per traslazione degli assi.



Si fissi allora un numero $a \neq 0$ e nel piano $\mathrm{O}'XY$ si consideri una *direttrice* s ("*orizzontale*") di equazione $y = -\dfrac{1}{4a}$ ed un *fuoco* $\mathrm{F}\equiv\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$. Sostituendo questi valori nella (•) (cioè $m = 0$, $q = -1/4a$, $u = 0$, $v = 1/4a$) ed elevando ambo i membri al quadrato [due numeri <u>positivi</u> sono uguali se e solo se lo sono i loro quadrati (!)], si ottiene

(••) $$Y = aX^2,$$

che esprime l'equazione di una generica parabola Γ che <u>ha il vertice nell'origine</u> O' ed ha l'asse delle ordinate Y come asse di simmetria. Per $a = 1$ si ottiene il grafico della (già più volte citata) funzione $f(X) = X^2$ ed è interessante notare le variazioni dei grafici di queste parabole al variare del parametro a; in particolare per $a > 0$ la parabola è *convessa* (cioè rivolta con i suoi rami verso l'alto), mentre per $a < 0$ è *concava* (cioè rivolta con i suoi rami verso il basso); inoltre più è grande il valore di $|a|$, più la parabola è "*stretta*".

Se ora operiamo una traslazione degli assi (cfr.**4.7**) introducendo sullo stesso piano un nuovo sistema di assi cartesiani $\mathrm{O}xy$ (traslazione dei precedenti) per cui risulti $\mathrm{O}'\equiv(k,h)$, la (••) diventa $y - h = a(x-k)^2$, cioè l'equazione della parabola assume la forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

dove il parametro a è rimasto invariato (!) e dove si è posto

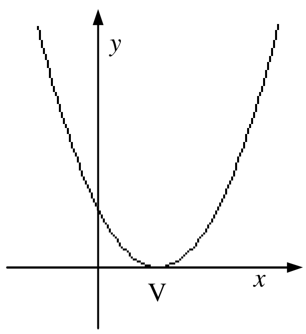
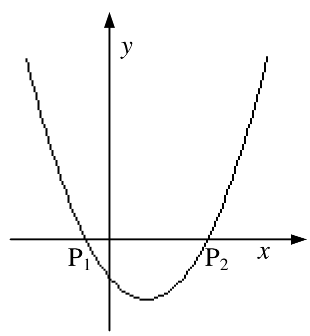
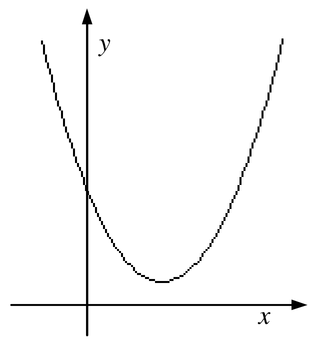
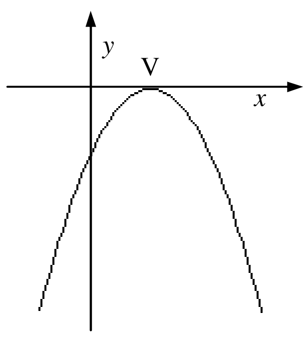
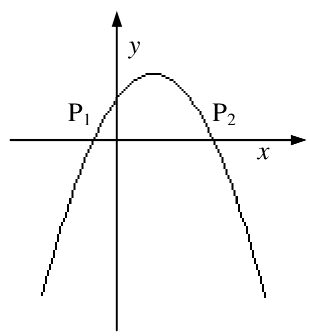
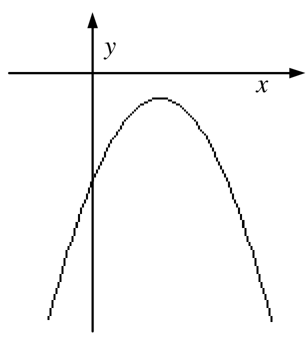
$$\begin{cases} b = -2ak \\ c = ak^2 + h \end{cases} \quad \text{e quindi è} \quad \begin{cases} k = -b/2a \\ h = (4ac - b^2)/4a \end{cases} .$$

L'espressione $\Delta \equiv b^2 - 4ac$ viene chiamata "***discriminante***" dell'equazione. Poiché la parabola Γ ha il vertice nella "*vecchia*" origine O', nel nuovo sistema Oxy il vertice ha coordinate $V \equiv (k,h) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, l'equazione della direttrice è data da $y = -\frac{1}{4a} + h = -\frac{1+\Delta}{4a}$ e il fuoco è dato da $F \equiv \left(k, \frac{1}{4a} + h\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$.

Con questa impostazione è facile ma importante notare che la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha il vertice sull'asse delle ascisse se e solo se è ($h = 0$, e quindi) $\Delta = 0$. Inoltre se risulta $\Delta > 0$ ed $a > 0$ (e quindi $h < 0$) la parabola ha il vertice "sotto" l'asse delle ascisse ed è convessa e quindi interseca l'asse delle ascisse in due punti; se risulta $\Delta > 0$ ed $a < 0$ (e quindi $h > 0$), la parabola ha il vertice "*sopra*" l'asse delle ascisse ed è concava ed ancora interseca l'asse delle ascisse in due punti. Si constati infine che se risulta $\Delta < 0$, allora la parabola non interseca l'asse delle ascisse.

Ricapitolando, la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ interseca l'asse delle ascisse se e solo risulta $\Delta \equiv b^2 - 4ac \geq 0$ ed in particolare se è $\Delta = 0$, lo interseca nel solo punto $V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$; se è $\Delta > 0$, lo interseca nei due punti $P_1 \equiv \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ e $P_2 \equiv \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ [Si lascia al lettore constatare che P_1 e P_2 hanno proprio queste ascisse].

$$y = ax^2 + bx + c$$

<table>
<tr><td>$\Delta = 0$, $a > 0$</td><td>$\Delta > 0$, $a > 0$</td><td>$\Delta < 0$, $a > 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$, $a < 0$</td><td>$\Delta > 0$, $a < 0$</td><td>$\Delta < 0$, $a < 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5 – DISEQUAZIONI

5.1- Generalità.

Ci occuperemo soltanto di disequazioni in una indeterminata del tipo (o ad esso riconducibile)

$$f(x) > k \quad \text{(oppure} \quad f(x) \geq k, \;\; f(x) < k, \;\; f(x) \leq k),$$

dove $y = f(x)$ è una funzione reale di variabile reale e k è un numero reale. L'insieme $S \equiv \{x \in \Re \; / \; f(x) > k\}$ si dice "***insieme soluzione***" (o semplicemente "***soluzione***") della disequazione $f(x) > k$ e ogni $x \in S$ si dice "***una soluzione***" della stessa (e così per le altre disequazioni).

Una prima riflessione ovvia, ma molto importante sulle disequazioni è la seguente: perché un punto $x \in \Re$ sia soluzione della disequazione $f(x) > k$ è necessario che appartenga al "*campo di esistenza*" della f [in altre parole, perché si possa affermare che $f(x)$ sia maggiore oppure minore del numero reale k occorre prima di tutto che $f(x)$ sia anche lui un numero reale; ad esempio la disequazione $\sqrt{x-2} < 3$ non ha certamente il numero 1 tra le sue soluzioni, perché per $x < 2$ l'espressione $\sqrt{x-2}$ non esiste tra i numeri reali e quindi non è confrontabile con alcuno di questi. IMPORTANTE : L'espressione $\sqrt{-1}$ non esiste, è "*niente*" nel campo reale, da non confondere con 0 (zero) che invece è un numero reale (anche se un po' particolare) e quindi confrontabile con gli altri numeri reali]. Apriamo quindi una breve parentesi sui campi di esistenza delle funzioni reali.

CAMPI DI ESISTENZA

La maggior parte delle funzioni reali che utilizziamo nelle applicazioni sono espresse per mezzo di una o più delle otto operazioni aritmetiche (somma, differenza, prodotto, divisione, potenza, radice, esponenziale, logaritmo) con le quali si può operare nel campo dei numeri reali. Quindi per l'esistenza di tali funzioni basta tener presente quando queste operazioni danno risultato e quando lo danno unico. Non esiste alcun problema, come abbiamo visto, per la somma, la differenza, il prodotto, la potenza ad esponente intero positivo e l'esponenziale. Mentre qualche problema esiste per le altre e in particolare:

DIVISIONE – occorre il divisore diverso da zero:

$$\boxed{1/x \text{ esiste se è } x \neq 0.}$$

POTENZA AD ESPONENTE IRRAZIONALE – occorre la base maggiore di zero:

$$\boxed{x^a \text{ esiste se è } x > 0.}$$

RADICE AD INDICE PARI – occorre il radicando maggiore o uguale a zero:

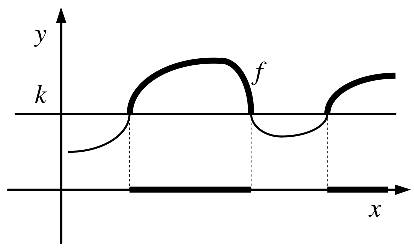
$$\boxed{\sqrt[2n]{x} \text{ esiste se è } x \geq 0.}$$

LOGARITMO – occorre l'argomento maggiore di zero:

$$\boxed{\log_a x \text{ esiste se è } x > 0.}$$

A queste regole vanno aggiunte (cfr.**3.5**) le seguenti:

$$\boxed{arcsen\,x \text{ e } arccos\,x \text{ esistono se è } x \in [-1,1]}$$



Una seconda riflessione sulle disequazioni è sul loro significato grafico: risolvere la disequazione $f(x) > k$ significa determinare le ascisse di quei punti del grafico della f che hanno ordinata superiore a k, cioè evidenziare i punti del grafico di f che si trovano "*al di sopra*" della retta di equazione $y = k$ e quindi determinare le ascisse di tali punti. La visualizzazione grafica delle disequazioni permette di attenuare i dubbi e le incertezze nel cercare di risolverle, ma per questo occorre una buona sicurezza nel tracciare o immaginare i grafici almeno delle funzioni semplici.

Si noti anche che l'unione dei tre insiemi $\{x \in \Re \ / \ f(x) > k\}$, $\{x \in \Re \ / \ f(x) = k\}$, $\{x \in \Re \ / \ f(x) < k\}$ dà il campo di esistenza della funzione f. E poiché nella maggior parte dei casi per risolvere la disequazione $f(x) > k$ bisogna aver risolto in precedenza l'equazione $f(x) = k$, se si conosce il campo di esistenza della f, conoscere le soluzioni della $f(x) > k$ significa conoscere anche quelle della $f(x) < k$ [non c'è quindi bisogno di ripetere i calcoli per risolvere questa seconda disequazione].

Infine si noti che le disequazioni $f(x) > k$ e $f(x) - k > 0$ sono "*equivalenti*", cioè hanno le stesse soluzioni. Ecco perché nel seguito, quando operativamente sarà conveniente, risolveremo la seconda (o supporremo $k = 0$) al posto della prima.

Nel risolvere le disequazioni ognuno ha i suoi metodi [un po' come un tennista ha la propria maniera di impugnare la racchetta]. Spesso però questi metodi sono farraginosi e ammesso che portino alla soluzione [più calcoli si fanno, più c'è probabilità di errore (!)], non lo fanno in tempi ragionevoli [sono un incubo le pagine e pagine dedicate alla soluzione di maledetti sistemi legati a semplici disequazioni]. Bisogna tener presente che le disequazioni sono uno strumento di lavoro [come la racchetta per il tennista o lo stetoscopio per il medico] per affrontare altri problemi, altre applicazioni, e non è lecito non solo non trovare le soluzioni, ma neanche impiegarci più tempo e calcoli del dovuto a discapito del problema principale [si immagini un medico che nel visitare ha difficoltà a capire come si usa lo stetoscopio]. Per questo nelle pagine seguenti verranno proposti metodi e procedimenti pratici [soprattutto sullo scomporre un problema che sembra complicato in un numero finito di problemi più semplici]. Lo studente naturalmente seguirà tali suggerimenti se li riterrà utili e semplici; ma si tenga presente che soltanto con parecchio esercizio e capendo cosa si sta facendo si può raggiungere una certa sicurezza, naturalezza e velocità nell'operare.

5.2- Disequazioni di primo e secondo grado.

Si tratta di disequazioni rispettivamente del tipo

$$ax + b \lesseqgtr 0 \qquad \text{e} \qquad ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0,$$

nelle quali è conveniente (si tratta di un suggerimento) fare in modo che il coefficiente a sia positivo (aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri della disequazione gli stessi addendi) e quindi possiamo limitarci a "*pensare*" a questo caso.

ESEMPI: $7 - 3x < 0 \Leftrightarrow 3x > 7$; $3 - 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 < 0$.

Per le disequazioni di 1° grado si ha:

$$\boxed{a > 0 \Rightarrow \begin{cases} ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -b/a, \\ ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -b/a, \\ ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -b/a, \end{cases}}$$

e non aggiungiamo altro.

ESEMPI : • $2x - 8 > 0 \iff 2x > 8 \iff x > 4$.
• $2x - 3 > 4x + 5 \iff -5 - 3 > 4x - 2x \iff 2x < -8 \iff x < -4$.
• $6 - x < 4 \iff 6 - 4 < x \iff x > 2$.

Per le disequazioni di 2° grado possiamo quindi limitarci a pensare il "*primo*" coefficiente $a > 0$. La soluzione della disequazione

$$(*) \qquad ax^2 + bx + c > 0 \qquad (a > 0)$$

sarà immediata se nella nostra mente immaginiamo la parabola Γ di equazione $y = ax^2 + bx + c$ (che è convessa) posizionata in un sistema Oxy di assi cartesiani. Le ascisse dei punti della parabola che hanno ordinata positiva sono le soluzioni della (*). La parabola Γ può assumere nel sistema Oxy posizioni diverse a seconda del valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ (cfr. la prima terna di parabole disegnate a pag 33), e ricordiamo che si ha:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (ax^2 + bx + c = 0 \iff x = -b/2a);$$
$$\Delta > 0 \Rightarrow (ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a});$$
$$\Delta < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \text{ mai.}$$

IMPORTANTE : Ricordiamo che se risulta $ax^2 + bx + c = 0$ per $x = \alpha$ ed $x = \beta$, allora si ha

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Quindi si avrà:

$$\Delta = 0,\ a > 0 \Rightarrow (ax^2 + bx + c > 0 \iff x \neq -b/2a);$$
$$\Delta > 0,\ a > 0 \Rightarrow (ax^2 + bx + c > 0 \iff x < \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x > \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a});$$
$$\Delta < 0,\ a > 0 \Rightarrow (ax^2 + bx + c > 0 \iff x \in \mathfrak{R}).$$

Per esclusione si ha anche :

$$\Delta \leq 0,\ a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0 \text{ mai;}$$
$$\Delta > 0,\ a > 0 \Rightarrow (ax^2 + bx + c < 0 \iff \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < x < \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}).$$

[E' estremamente importante non "*imparare*" le regole sopra scritte, ma farle proprie convincendosi della loro validità "*vedendole*" graficamente.]

ESEMPI :

• $3x^2 - 8x - 1 \leq 0 \iff \frac{4 - \sqrt{19}}{3} \leq x \leq \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$ [infatti la parabola $y = 3x^2 - 8x - 1$ è posizionata nel sistema Oxy come la seconda di pag. 33, essendo $3x^2 - 8x - 1 = 0 \iff x = \frac{4 \mp \sqrt{16 + 3}}{3}$ (•)].

• $2x - 1 > 5 - x^2 + x \iff x^2 + x - 6 > 0 \iff x < -3$ e $x > 2$ [essendo $x^2 + x - 6 = 0 \iff x = (-1 \pm 5)/2$].

(•) Qui è stata usata la "*formula ridotta*": $ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b/2 \mp \sqrt{b^2/4 - ac}}{a}$, ottenuta da quella usuale dividendo per 2 sia il numeratore che il denominatore della frazione.

• $x - x^2 > 8 \iff x^2 - x + 8 < 0 \iff x \in \varnothing$ [infatti la parabola $y = x^2 - x + 8$ è posizionata tutta al di sopra dell'asse delle ascisse, essendo $\Delta = 1 - 32 < 0$].

Nel caso di una disequazione di 2° grado pura (cioè senza il termine di 1° grado), che è sempre riconducibile alla forma $x^2 < k$ (o $x^2 > k$, …), è consigliabile fare riferimento alla nota parabola di equazione $y = x^2$ e "*vedere*" quali suoi punti giacciono al di sotto o al di sopra della retta di equazione $y = k$.

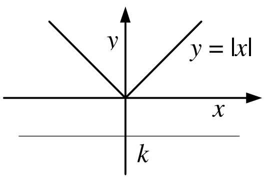
ESEMPI : • $x^2 < -1$ mai ; • $x^2 > 0 \iff x \neq 0$; • $x^2 > 4 \iff x < -2$ opp. $x > 2$;
• $x^2 - 3x + 2 \leq x - x^2 \iff 2x^2 - 4x + 2 \leq 0 \iff 2(x^2 - 2x + 1) \leq 0 \iff (x-1)^2 \leq 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$.

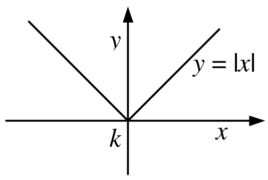
5.3- <u>Disequazioni con il valore assoluto</u>.

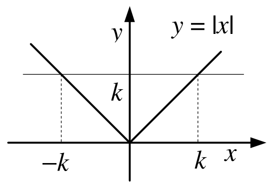
La più semplice disequazione con il valore assoluto è del tipo

(*) $$|x| < k \quad \text{oppure} \quad |x| > k,$$

con $k \in \Re$ (se le disequazioni sono scritte con i simboli "≤" oppure "≥", alle soluzioni delle precedenti vanno aggiunte le soluzioni dell'equazione $|x| = k$). Le soluzioni si "*vedono*" facilmente immaginando il grafico della funzione $y = |x|$ insieme alla retta di equazione $y = k$. Sono possibili tre casi: $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$







Innanzitutto si ha $$|x| = k \iff \begin{cases} \text{mai} & , \text{ se } k < 0 \\ x = 0 & , \text{ se } k = 0 \\ x = \mp k & , \text{ se } k > 0 \end{cases}$$ e poi risulta

(**) $$|x| < k \iff \begin{cases} \text{mai} & , \text{ se } k \leq 0 \\ -k < x < k & , \text{ se } k > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad |x| > k \iff \begin{cases} x \in \Re & , \text{ se } k < 0 \\ x \neq 0 & , \text{ se } k = 0 \\ x < -k \text{ opp. } x > k & , \text{ se } k > 0 \end{cases}$$

[Le soluzioni sopra descritte, così graficamente evidenti, si ottengono rigorosamente applicando semplicemente la definizione di valore assoluto di un numero, cioè distinguendo il caso $x \geq 0$ da quello $x \leq 0$.]

ESEMPI : • $|x| < -1$ non è mai verificata; • $|x| \leq 4 \iff -4 < x < 4$.

Le (**) si possono sintetizzare così: $|x| < k \iff x \in \{x \,/\, x < k\} \cap \{x \,/\, x > -k\}$, $|x| > k \iff x \in \{x \,/\, x > k\} \cup \{x \,/\, x < -k\}$, particolarmente utili nel caso in cui al posto della x nelle (*) vi sia una funzione $f(x)$ e k non sia costante, ma sia anche lei una funzione $k(x)$. Quindi possiamo scrivere:

!! $$\boxed{\begin{array}{l} |f(x)| < k(x) \iff x \in \{x \,/\, f(x) < k(x)\} \cap \{x \,/\, f(x) > -k(x)\} \\[1em] |f(x)| > k(x) \iff x \in \{x \,/\, f(x) > k(x)\} \cup \{x \,/\, f(x) < -k(x)\} \end{array}}$$!!

ESEMPI (da seguire con attenzione) :

• $|2x - 3| < -2^x$ mai [il valore assoluto non può stare al di sotto di una funzione tutta negativa].

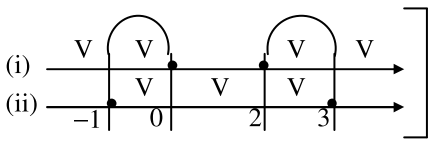
- $|x-5| > -(x-5)^2 \Leftrightarrow x \neq 5$ [il secondo membro è negativo, tranne che per $x = 5$, dove si annulla; ma per $x = 5$ si annulla anche il primo membro che altrimenti è positivo].

- $|2x+1| \le 7 \Leftrightarrow -7 \le 2x+1 \le 7 \Leftrightarrow -8 \le 2x \le 6 \Leftrightarrow -4 \le x \le 3$.

- $|4x-2x^2+3| \le 3 \Leftrightarrow x \in \{x / 4x-2x^2+3 \le 3\} \cap \{x / 4x-2x^2+3 \ge -3\} \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$ opp. $2 \le x \le 3$.

(i) $4x-2x^2+3 \le 3 \Leftrightarrow 2x^2-4x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0$ opp. $x \ge 2$

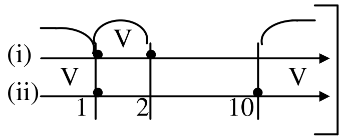
(ii) $4x-2x^2+3 \ge -3 \Leftrightarrow 2x^2-4x-6 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$



- $|7x-x^2-6| > 4x-4 \Leftrightarrow x \in \{x / 7x-x^2-6 > 4x-4\} \cup \{x / 7x-x^2-6 < -4x+4\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < 1$, opp. $1 < x < 2$, opp. $x > 10$.

(i) $7x-x^2-6 > 4x-4 \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

(ii) $7x-x^2-6 < -4x+4 \Leftrightarrow x^2-11x+10 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ opp. $x > 10$

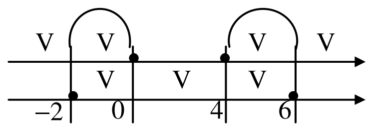


- $(x-2)^2 - 6|x-2| + 8 < 0$ [è una disequazione di 2° grado nella indeterminata $|x-2|$ e verificata per i valori interni all'intervallo delle radici]

$\Leftrightarrow 2 < |x-2| < 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \{x / |x-2| > 2\} \cap \{x / |x-2| < 4\} =$

$= \{x / x < 0 \text{ opp. } x > 4\} \cap \{x / -2 < x < 6\} =]-2,0[\cup]4,6[$



5.4- <u>Disequazioni irrazionali</u>.

Tratteremo soltanto disequazioni del tipo

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \qquad \text{oppure} \qquad \sqrt{f(x)} > g(x),$$

(o con i simboli "≤" e "≥") con f e g funzioni reali. Per comodità di simbolismo poniamo

$$A = \{x / f(x) \ge 0\} \quad , \quad B = \{x / g(x) < 0\} \quad , \quad C = \{x / g(x) \ge 0\}$$

(1) La prima cosa da imporre è che sia $f(x) \ge 0$, altrimenti il primo membro della disequazione non è un numero reale. Quindi le soluzioni (se esistono) <u>apparterranno esclusivamente all'insieme</u> A.

(2) La seconda riflessione è sulla validità o meno della disequazione nel caso che sia $g(x) < 0$. Infatti se è $g(x) < 0$ (cioè $x \in$ B), la disequazione $\sqrt{f(x)} < g(x)$ (o $\sqrt{f(x)} \le g(x)$) è certamente <u>falsa</u>. Invece, sempre per $x \in$ B (e contemporaneamente $x \in$ A) la disequazione $\sqrt{f(x)} > g(x)$ (opp. $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$) è certamente <u>verificata</u>.
[Come si vede, per le due disequazioni si segue lo stesso ragionamento, ma la conclusione è diversa.]

(3) Infine in $A \cap C$ entrambi i membri della disequazione sono non negativi e quindi le soluzioni sono le stesse di quelle che si ottengono elevando ambo i membri al quadrato:

$$x \in A \cap C \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < [g(x)]^2 & \text{(lo stesso con "≤")} \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > [g(x)]^2 & \text{(lo stesso con "≥")} \end{cases}$$

Riepilogando si ha

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \cap \{x \,/\, f(x) < [g(x)]^2\},$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\, \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \cap \{x \,/\, f(x) > [g(x)]^2\}),$$

[dove si può sostituire "<" con "≤" ad entrambi i membri della prima, e ">" con "≥" ad entrambi i membri della seconda.]

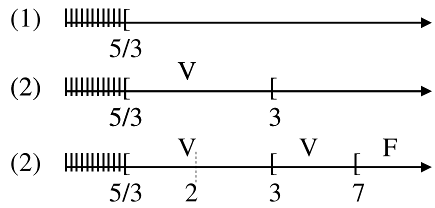
ESEMPI :

[•] $\sqrt{3x-5} > x - 3$

(1) $3x - 5 \geq 0 \iff x \geq 5/3$;

(2) Se $x - 3 < 0$ (cioè $x < 3$) la [•] è verificata;

(3) Per $x \geq 3$ la [•] è equivalente a $3x - 5 > (x - 3)^2$
$\iff x^2 - 9x + 14 < 0 \iff 2 < x < 7$.



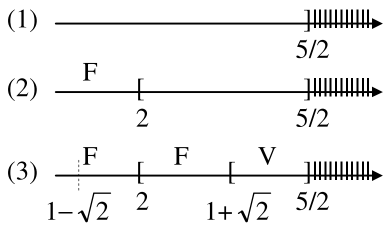
La soluzione è allora $5/3 \leq x < 7$.

[••] $\sqrt{5-2x} \leq x - 2$

(1) $5 - 2x \geq 0 \iff x \leq 5/2$;

(2) Se $x - 2 < 0$ (cioè $x < 2$) la [••] è falsa;

(3) Per $2 \leq x \leq 5/2$ la [••] è equivalente a $5 - 2x \leq (x - 2)^2$
$\iff x^2 - 2x - 1 \geq 0 \iff x \leq 1 - \sqrt{2}$ opp. $x \geq 1 + \sqrt{2}$.



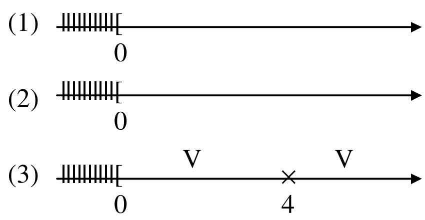
La soluzione è allora $1 + \sqrt{2} .\leq x \leq 5/2$.

[•••] $4\sqrt{x} < x + 4$

(1) $x \geq 0$;

(2) Si noti che per $x \geq 0$ è sempre $x + 4 > 0$;

(3) Per $x \geq 0$ la [•••] è equivalente a $16x < (x + 4)^2$
$\iff (x - 4)^2 > 0 \iff x \neq 4$.



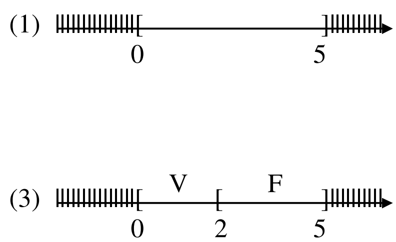
La soluzione è allora $0 \leq x \neq 4$.

[••••] $3\sqrt{x} < \sqrt{8x - 2x^2 + 10}$ [è una variante delle precedenti.]

(1) Occorre in simultanea $x \geq 0$ e $8x - 2x^2 + 10 \geq 0$, cioè $x \geq 0$ e $-1 \leq x \leq 5$, cioè $0 \leq x \leq 5$;

(2) I due membri, dove esistono, sono non negativi;

(3) Per $0 \leq x \leq 5$ la [••••] è equivalente a $9x < 8x - 2x^2 + 10$
$\iff 2x^2 + x - 10 < 0 \iff -5/2 < x < 2$.



La soluzione è allora $0 \leq x < 2$.

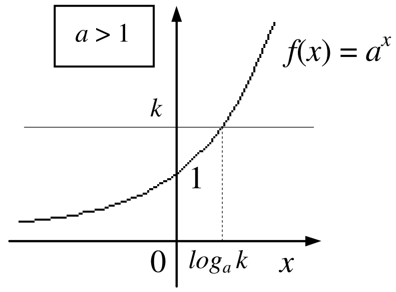
5.5- Disequazioni esponenziali.

Fissato un numero $a > 1$, consideriamo la funzione esponenziale $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^+$ definita da $f(x) = a^x$. Sappiamo che è monotòna crescente e che ha la funzione logaritmo come funzione inversa. Tenendo presente il suo grafico, è facile "*vedere*" le soluzioni dell'equazione e delle disequazioni seguenti:

$$a^x = k \iff \begin{cases} \text{mai} & , \text{ se } k \le 0 \\ x = log_a k & , \text{ se } k > 0 \end{cases}$$

$$a^x > k \iff \begin{cases} x \in \mathfrak{R} & , \text{ se } k \le 0 \\ x > log_a k & , \text{ se } k > 0 \end{cases}$$

$$a^x < k \iff \begin{cases} \text{mai} & , \text{ se } k \le 0 \\ x < log_a k & , \text{ se } k > 0 \end{cases}$$



ESEMPI : • $2^x > 8 \iff x > 3$; • $e^x \le 15 \iff x \le log\, 15$;

• $2^{2(x+1)} - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \iff 4 \cdot (2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \iff 1/4 < 2^x < 8 \iff -2 < x < 3$;

• $e^{5x+7} \ge 1 \iff 5x + 7 \ge 0 \iff x \ge -7/5$;

• $e^{2x} - e^x - 2 > 0 \iff e^x < -1$ opp, $e^x > 2 \iff$ [la prima non è mai verificata] $x > log\, 2$.

Nel caso di una base compresa tra 0 ed 1, si può ancora pensare al grafico dell'esponenziale, che in questo caso è monotòna decrescente. Ma nella maggior parte dei casi (anche per non affollare troppo la mente di grafici che si possono confondere l'un l'altro) è conveniente pensare al fatto che è

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$

e quindi tornare a disequazioni in base maggiore di uno.

ESEMPI : • $(1/2)^x > 8 \iff 2^x < 1/8 \iff x < -3$; • $(3/4)^x < 1 \iff (4/3)^x > 1 \iff x > 0$.

5.6- Disequazioni logaritmiche.

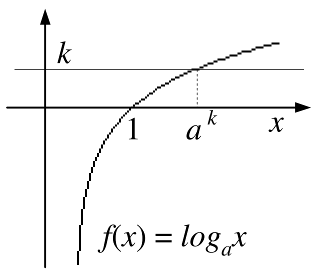
Fissato un numero $a > 1$, consideriamo la funzione logaritmo $f : \mathfrak{R}^+ \to \mathfrak{R}$ definita da $f(x) = log_a x$. Sappiamo che è monotòna crescente e che ha la funzione esponenziale come funzione inversa. Tenendo presente il suo grafico, è facile "*vedere*" le soluzioni dell'equazione e delle disequazioni seguenti ($\forall\, k \in \mathfrak{R}$) :

$$log_a x = k \iff x = a^k \;;$$

$$log_a x > k \iff x > a^k \;;$$

$$log_a x < k \iff 0 < x < a^k \,.$$

$\boxed{a > 1}$



ESEMPI : • $log_2 x > 1/3 \iff x > \sqrt[3]{2}$;

• $log^2 x - 1 > 0 \iff -1 < log x < 1 \iff 1/e < x < e$;

• $log(2x + 3) < 0 \iff 0 < 2x + 3 < 1 \iff -3/2 < x < -1$;

- $log(\sqrt{x}\ + 4x - 1/2) \le 0 \iff 0 < \sqrt{x}\ + 4x - 1/2 \le 1 \iff 1/16 < x \le 1/4$

essendo : i) $0 < \sqrt{x}\ + 4x - 1/2 \iff \sqrt{x}\ > 1/2 - 4x \iff x > 1/16;$
ii) $\sqrt{x}\ + 4x - 1/2 \le 1 \iff \sqrt{x}\ \le 3/2 - 4x \iff 0 \le x \le 1/4.$

Nel caso di una base compresa tra 0 ed 1, si può ancora pensare al grafico della funzione logaritmo, che in questo caso è monotòna decrescente. Ma nella maggior parte dei casi (anche per non affollare troppo la mente di grafici che si possono confondere l'un l'altro) è conveniente pensare al fatto che è (confronta la formula di cambiamento di base)

$$log_{1/a}\, x = -log_a\, x$$

e quindi tornare a disequazioni in base maggiore di uno.

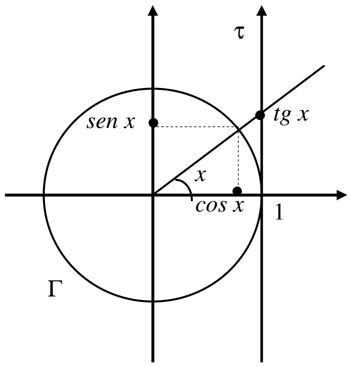
ESEMPIO : • $log_{1/2}x > 3 \iff log_2 x < -3 \iff 0 < x < 1/8$.

5.7- <u>Disequazioni trigonometriche</u>.

Tratteremo soltanto disequazioni del tipo più semplice:

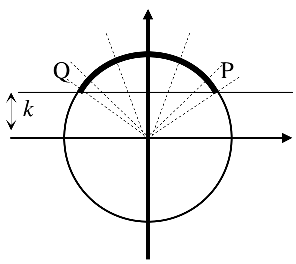
$$sen\, x > k\ ,\quad cos\, x > k\ ,\quad tg\, x > k \qquad \text{(oppure con i segni “}\ge\text{” , “}<\text{” , “}\le\text{”)}$$

Poiché le funzioni *seno*, *coseno*, *tangente* sono periodiche, è sufficiente cercare le soluzioni (delle disequazioni) in un loro periodo completo, tenendo conto che se x è una soluzione di $sen\, x > k$ oppure di $cos\, x > k$, allora lo è anche $x + 2z\pi$ $(\forall\, z \in \mathbb{Z})$; mentre se x è soluzione di $tg\, x > k$, lo è anche $x + z\pi$ $(\forall\, z \in \mathbb{Z})$.



Il modo più immediato per "*vedere*" le soluzioni di queste disequazioni è quello di fare riferimento al cerchio goniometrico Γ immerso in un sistema (innominato) di assi cartesiani e ricordare [è molto importante tenere presente quanto detto nel Cap.**3**] che l'insieme di arrivo del *seno* è l'asse delle ordinate, l'insieme di arrivo del *coseno* è l'asse delle ascisse, l'insieme di arrivo della *tangente* è un asse τ "verticale" tangente al cerchio goniometrico Γ nel punto di origine degli archi.

Occupiamoci della disequazione $sen\, x > k$, lasciando al lettore il compito di riflettere sulle soluzioni di $sen\, x = k$ e $sen\, x < k$. Fissato un numero $k \in \Re$, tracciamo nel piano cartesiano (dove è immerso Γ) una retta "*orizzontale*" ad altezza k. Se in particolare è $k \in\ ]-1,1[$ (si veda la figura qui a destra), la retta interseca Γ in due punti P e Q. Evidenziamo l'arco superiore di estremi P e Q, perché la soluzione della nostra disequazione è costituita da tutti gli angoli x che insistono su tale arco. In formule si ha:

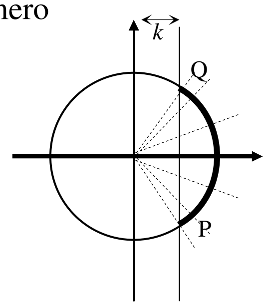


$$\begin{cases} sen\, x > k \\ -\pi/2 \le x \le 3\pi/2 \end{cases} \iff \begin{cases} -\pi/2 \le x \le 3\pi/2 & \text{, se } k < -1 \\ arcsen\, k < x < \pi - arcsen\, k & \text{, se } -1 \le k < 1 \\ \text{mai} & \text{, se } k \ge 1 \end{cases}$$

ESEMPI : • $\begin{cases} sen\, x \geq -\sqrt{2}/2 \\ -\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow -\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$

• $2sen^2 x + 3sen\, x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < sen\, x < 1/2 \Leftrightarrow sen\, x < 1/2 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{7}{6}\pi + 2z\pi, \frac{1}{6}\pi + 2z\pi\right[$.

Occupiamoci ora della disequazione *cos x > k*, lasciando al lettore il compito di riflettere sulle soluzioni di *cos x = k* e *cos x < k*. Fissato un numero $k \in \Re$, tracciamo nel piano cartesiano (dove è immerso Γ) una retta "*verticale*" che taglia l'asse delle ascisse ad altezza *k*. Se in particolare è $k \in \,]-1,1[$ (si veda la figura qui a destra), la retta interseca Γ in due punti P e Q. Evidenziamo l'arco più a destra di estremi P e Q, perché la soluzione della nostra disequazione è costituita da tutti gli angoli *x* che insistono su tale arco (infatti i punti di questo arco hanno ascisse superiori a *k*). In formule si ha:

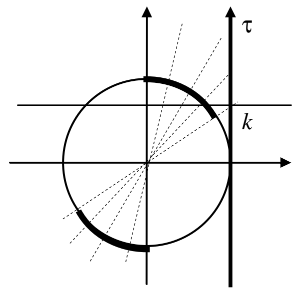


$$\begin{cases} cos\, x > k \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \leq x \leq \pi & \text{, se } k < -1 \\ -arccos\, k < x < arccos\, k & \text{, se } -1 \leq k < 1 \\ \text{mai} & \text{, se } k \geq 1 \end{cases}$$

ESEMPIO : $\begin{cases} 4cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)cos\, x - \sqrt{3} \leq 0 \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/2 \leq cos\, x \leq \sqrt{3}/2 \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-2\pi/3\, , -\pi/6] \cup [\pi/6\, , 2\pi/3]$.

Occupiamoci infine della disequazione *tg x > k*, lasciando al lettore il compito di riflettere sulle soluzioni di *tg x = k* e *tg x < k*. Fissato un numero $k \in \Re$, tracciamo nel piano cartesiano (dove sono immersi Γ e l'asse τ) una retta "*orizzontale*" ad altezza *k*. Sarà soluzione della nostra equazione ogni angolo individuato (insieme con l'origine degli angoli) da quelle semirette che (prolungate) intersecano l'asse τ in un punto maggiore di *k* (si veda la figura qui a destra). In formule si ha:



$$\begin{cases} tg\, x > k \\ -\pi/2 < x < \pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow arctg\, k < x < \pi/2$$

ESEMPIO : $\begin{cases} tg^2 x - tg\, x - 2 \geq 0 \\ -\pi/2 < x < \pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\, x \leq -1 \text{ opp. } tg\, x > 2 \\ -\pi/2 < x < \pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[arctg 2, \frac{\pi}{2}\right[$.

In modo simile si possono trattare le analoghe disequazioni con la *cotangente* e si lascia al lettore la loro impostazione e visualizzazione grafica. Ma si tenga anche presente che è possibile usare la formula *ctg x* = 1/*tg x*, facendo molta attenzione al fatto che *tangente* e *cotangente* hanno campi di esistenza diversi.

5.8- Disequazioni razionali.

Si intendono con questo termine ad esempio disequazioni del tipo

[1] $$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

(se compaiono i simboli "≥" o "≤" bisogna aggiungere le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$), ma con f e g funzioni di tipo qualunque. Le uniche e semplici regole che governano queste disequazioni sono quelle dei "*segni*", riassunte sinteticamente da.

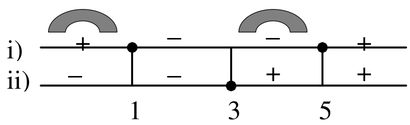
$$\boxed{+\cdot+=+ \;\;,\;\; -\cdot+=- \;\;,\;\; +\cdot-=- \;\;,\;\; -\cdot-=+\,.}$$

In altre parole **il rapporto** $\boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)}}$ **è positivo o negativo a seconda che i segni di numeratore e denominatore siano rispettivamente concordi o discordi !**

Ciò implica che per risolvere una disequazione di tipo [1] occorre per prima cosa conoscere i segni di $f(x)$ e $g(x)$ al variare di x, e poi applicare le regole dei segni. Come già è stato detto all'inizio del capitolo, conoscendo il campo di esistenza della f e risolvendo la disequazione $f(x) > 0$, già si risolve implicitamente l'equazione $f(x) = 0$ e quindi, per passaggio al complementare e senza ulteriori calcoli, si conosce anche la soluzione di $f(x) < 0$. La stessa cosa vale ovviamente per la funzione g, ma si tenga presente che se è $g(x) = 0$ le espressioni in [1] non hanno senso.

ESEMPI : • $\frac{x^2-6x+5}{x-3} \le 0 \iff x \le 1$, opp. $3 < x \le 5$, infatti si ha:

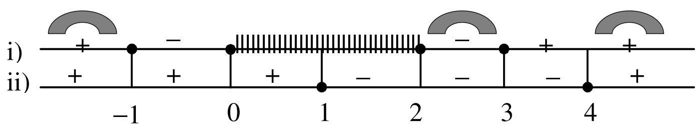
i) $x^2 - 6x + 5 > 0 \iff x < 1$ opp. $x > 5$;
ii) $x - 3 > 0 \iff x > 3$.



• $\frac{\log(x^2-2x)-\log 3}{e^{x^2-5x+4}-1} \ge 0 \iff x \le -1$, opp. $2 < x \le 3$, opp. $x > 4$,

infatti si noti che $\log(x^2 - 2x)$ non esiste in [0,2] e si ha:

i) $\log(x^2 - 2x) - \log 3 > 0 \iff x^2 - 2x > 3 \iff x < -1$ opp. $x > 3$,
ii) $e^{x^2-5x+4} - 1 > 0 \iff x^2 - 5x + 4 > 0 \iff x < 1$ opp. $x > 4$.



Riconducibili a quelle precedenti sono le disequazioni del tipo

[2] $$\frac{f(x)}{g(x)} < h(x) \quad \text{opp.} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > h(x)\,,$$

infatti si ha $\dfrac{f(x)}{g(x)} < h(x) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f(x)}{g(x)} - h(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f(x) - h(x)\cdot g(x)}{g(x)} < 0$ e analogamente per la seconda.

<u>ATTENZIONE</u> – Se nelle [2] si moltiplicano ambo i membri per $g(x)$, il segno della disequazione si conserva per quegli x in cui è $g(x) > 0$, ma si inverte per quegli x per cui è $g(x) < 0$ e bisognerebbe quindi distinguere i due casi. Quindi, a meno che la funzione g non abbia segno costante, <u>non è conveniente moltiplicare ambo i membri per $g(x)$</u> [è questa una delle fonti più frequenti di errore (!)].

ESEMPIO – • $\dfrac{x+1}{x-3} < x-2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x+1}{x-3} - x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x+1-x^2+2x+3x-6}{x-3} < 0 \;\Leftrightarrow$

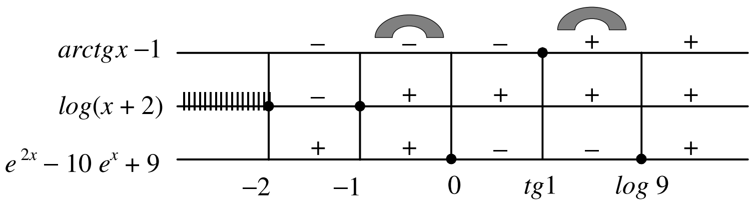
$\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2-6x+5}{x-3} > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 < x < 3$ opp. $x > 5$.

Delle varianti rispetto a quelle di tipo [1] possono essere le disequazioni del tipo

$$\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot \ldots \cdot g_m(x)} > 0 \qquad \text{(oppure con “<”).}$$

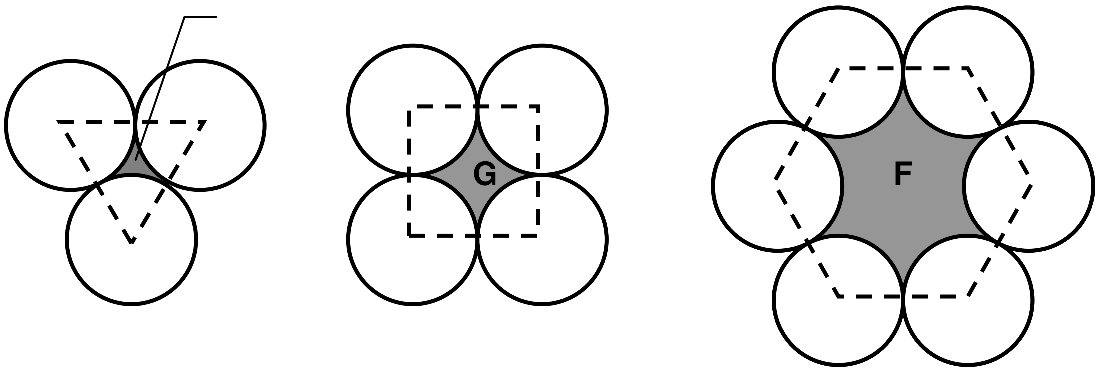
Per queste bisogna ancora tenere ben presenti le regole dei segni.

ESEMPIO • $\dfrac{(arctg\ x-1)\cdot log\ (x+2)}{e^{2x}-10\,e^x+9} \le 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [-1\ ,\ 0\ [\ \cup\ [\ tg1\ ,\ log\ 9\ [$, infatti (sinteticamente) si ha:



ESERCIZI SU RETTE, CERCHI,……

1- Calcolare l'area delle regioni E, F, G ombreggiate nella figura sottostante, sapendo che



i cerchi hanno tutti lo stesso raggio R e che i loro centri sono vertici di poligoni regolari.

2- Dati nel piano Oxy la retta t di equazione $y = x/2 + 12$ e il punto $C \equiv (8,6)$, determinare il raggio e l'equazione della circonferenza Γ di centro C che interseca la retta t in due punti P e Q aventi distanza tra loro pari a $4\sqrt{5}$. Determinare poi sulla circonferenza Γ un punto R scelto in modo che il triangolo PQR sia rettangolo.

3- Assegnati in un piano cartesiano Oxy i punti $A \equiv (0,5)$, $B \equiv (5,0)$ e la retta t di equazione $y = 10 - x$, determinare l'equazione e il centro della circonferenza passante per A e B e tangente a t.

4- Assegnate nel primo quadrante del piano cartesiano Oxy le due semirette s_1 ed s_2 uscenti dal punto $A \equiv (6,0)$ e giacenti rispettivamente sulle rette di equazioni $y = \sqrt{3}\,(x/3-2)$ e $x = 6$, siano $P \in s_1$ e $Q \in s_2$ i due punti a distanza $6\sqrt{3}$ da A. Determinare il raggio, il centro, l'equazione della circonferenza Γ tangente in P ad s_1 e tangente in Q ad s_2. Calcolare inoltre l'area di uno dei due triangoli isosceli inscritti in Γ che hanno per base la corda PQ.

5- Date nel piano Oxy le rette r_1, r_2 di equazioni rispettivamente $y = 8x$, $y = x/8$

- provare che la retta di equazione $y = x$ è la bisettrice dell'angolo individuato da r_1 ed r_2 nel primo quadrante.

- determinare il centro C e l'equazione della circonferenza Γ di raggio 7 che è situato nel 1° quadrante ed è tangente alla r_1 ed alla r_2 .

- se T_1 e T_2 sono rispettivamente i punti di tangenza di Γ con r_1 ed r_2, determinare l'area del quadrilatero OT_1CT_2.

- sia P un punto di Γ nell'arco (più corto) di estremi T_1 , T_2 e sia t la retta tangente a Γ nel punto P. Calcolare il perimetro del triangolo $\mathcal{T}$ individuato dalle rette r_1 , r_2 , t. (Nota: non è necessario conoscere le coordinate di P, né l'equazione di t.)

6- Dato nel piano Oxy il cerchio di equazione $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$, calcolare l'area della parte di cerchio compresa nel 1° quadrante.

7- Dato nel piano Oxy il cerchio Γ di equazione $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e su di esso il punto $T \equiv (\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$,

- determinare l'equazione della retta t tangente a Γ in T;
- calcolare l'area della regione limitata di piano esterna al cerchio e compresa tra l'asse delle ascisse e la retta t.

8- Nel piano Oxy si consideri la retta t di equazione $y = \sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3}$.

- Tra tutti i cerchi di raggio $r = 2\sqrt{3}$, determinare l'equazione di quello che ha il centro C sul semiasse positivo delle ascisse ed è tangente in un punto T alla retta t.
- Indicato con P il punto di intersezione della retta t con l'asse delle ascisse, calcolare l'area del triangolo CPT.

9- Sul piano Oxy si consideri la retta t di equazione $y = \dfrac{-3x - 10}{4}$.

- Determinare l'equazione del cerchio Γ che ha il centro sul semiasse positivo delle ascisse ed è tangente all'asse delle ordinate ed alla retta t.
- Determinare le coordinate dei vertici del quadrato $ABCD$ circoscritto al cerchio Γ che ha un lato sulla retta t.

10- Si determinino le coordinate del vertice D del rettangolo $ABCD$ sapendo che : **i**) il rettangolo è contenuto nel 1° quadrante del piano Oxy; **ii**) il vertice A ha coordinate (0,6); **iii**) il lato AD giace sulla retta di equazione $y = x + 6$; **iv**) il lato AB è lungo $3\sqrt{2}$; **v**) il cerchio circoscritto al rettangolo è tangente all'asse delle ascisse.

11- Determinare l'equazione del cerchio di raggio $\sqrt{3}$, contenuto nel primo quadrante del piano Oxy e che è simultaneamente tangente all'asse delle ascisse ed alla retta di equazione $y = \sqrt{3} \cdot x$.

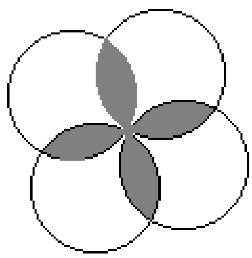
12- Nel piano Oxy è assegnato un cerchio Γ di raggio $r = 2\sqrt{3}$, la cui circonferenza passa per l'origine e il cui centro $C \equiv (\alpha, \beta)$ giace nel 1° quadrante sulla retta di equazione $y = x/\sqrt{3}$. Provare che l'area della regione E individuata dall'intersezione del 1° quadrante con il cerchio Γ è $6(\pi + \sqrt{3})$.

13- Nel piano Oxy si consideri il triangolo di vertici A≡(1,1), B≡(3,1), C≡(2,5). Tra tutte le rette uscenti dal punto A si determini l'equazione di quella che taglia il triangolo in due parti di area uguale.

14- Nel piano Oxy si considerino i punti $A \equiv (2 - \sqrt{3}, 1)$ e $B \equiv (2 + \sqrt{3}, 1)$. Determinare:

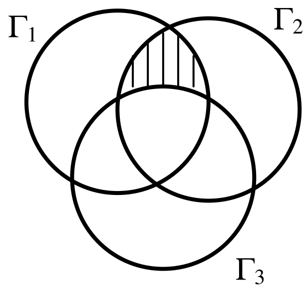
- un punto V in modo che il triangolo AVB (di base AB) sia isoscele ed abbia l'altezza (relativa al vertice V) pari ad 1;
- l'ampiezza dell'angolo al vertice V;
- il raggio r ed il centro C del cerchio Γ circoscritto al triangolo AVB;
- l'area delle quattro regioni in cui il triangolo AVB divide il cerchio Γ.

15- Calcolare l'area della regione E di piano a forma di fiore quadripetalo (con petali tutti uguali) disegnata con ombreggiatura in figura, sapendo che i quattro cerchi che la individuano hanno un solo punto in comune ed hanno tutti lo stesso raggio $r=2$.



E

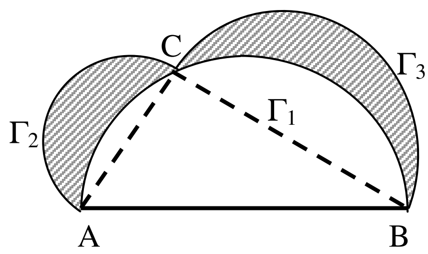
16- Dati in un piano due cerchi di raggio $r = \sqrt{6}$, tali che la circonferenza dell'uno passi per il centro dell'altro, calcolare l'area della loro intersezione.



17- Siano dati in un piano 3 cerchi Γ_1, Γ_2, Γ_3, tutti di raggio $r = 2$, disposti in modo tale che la circonferenza di ciascuno di essi passi per i centri degli altri due. Calcolare l'area della regione $D = (\Gamma_1 \cap \Gamma_2) - \Gamma_3$. (cfr. figura).

18- In un piano Oxy di considerino i punti A≡(0,1) e B≡(2,0). Si determinino le coordinate dei due punti C_1 e C_2 in modo che i due triangoli ABC_1 e ABC_2 siano entrambi retti in B ed entrambi di area 5. Si determini poi il centro C ed il raggio r della circonferenza Ω circoscritta al triangolo AC_1C_2.

19- Si consideri il semicerchio Γ_1 di diametro $\overline{AB} = \sqrt{53}$ ed il triangolo T = ABC in esso inscritto con $\overline{BC} = 7$. Si considerino poi i due semicerchi Γ_2 e Γ_3 esterni al triangolo T e che hanno per diametro AC e CB rispettivamente. Calcolare l'area complessiva delle due lunette, cioè dell'insieme $(\Gamma_2 \cup \Gamma_3) - \Gamma_1$.



20- Dato nel piano Oxy la circonferenza Γ di equazione $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ e su di essa il punto $T \equiv (\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+2)$, determinare l'equazione della retta t tangente a Γ in T e l'area della regione S limitata di piano esterna al cerchio e compresa tra l'asse delle ascisse e la retta t.

21- Nel piano Oxy determinare l'equazione della circonferenza di raggio $\sqrt{5}$ che ha il centro sul semiasse positivo delle ascisse ed è tangente alla retta s di equazione $y = 2x$.

DISEQUAZIONI

Delle seguenti funzioni reali determinare il Campo di Esistenza e gli insiemi

$Z \equiv \{x \in \Re \,/\, f(x)=0\}$, $P \equiv \{x \in \Re \,/\, f(x)>0\}$, $N \equiv \{x \in \Re \,/\, f(x)<0\}$.

22- $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

23- $f(x) = \sqrt{4 - |x+1|}$

24- $f(x) = \sqrt{\dfrac{4-x}{x^2 - 3x + 2}}$

25- $f(x) = \log \dfrac{x^2}{x+1}$

26- $f(x) = \log(2 + x - x^2)$

27- $f(x) = \log(3x^2 - 20x - 7)$

28- $f(x) = \log(1-x) - \log(5 + 9x - 2x^2)$

29- $f(x) = \log \dfrac{1-x}{5 + 9x - 2x^2}$

30- $f(x) = \log\left|\dfrac{2x+1}{x^2 + x}\right|$

31- $f(x) = 1 - \left|\dfrac{x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 6x}\right|$

32- $f(x) = \log \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x}$

33- $f(x) = \log\left(1 - \left|\dfrac{x-5}{x^2 - 3x}\right|\right)$

34- $f(x) = \sqrt{1 - \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}$

35- $f(x) = \log\left(\left|\dfrac{x-2}{x+4}\right| - 1\right)$

36- $f(x) = 7 - x + \sqrt{2x+1}$

37- $f(x) = 5\sqrt{5-x} + x - 11$

38- $f(x) = x - 9 + \sqrt{2(x^2 - 4x + 3)}$

39- $f(x) = \log(x + 10 - \sqrt{1-3x})$

40- $f(x) = \log(2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8)$

41- $f(x) = \sqrt{\log_4^2 x - 5 \cdot \log_4 x + 6}$

42- $f(x) = \sqrt{2 \cdot \log^2 x - 3 \cdot \log x - 2}$

43- $f(x) = \sqrt{\log(6 - 13x - 6x^2)}$

44- $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{2x+1}{2x-1}$

45- $f(x) = \sqrt{\dfrac{2^x - 8}{4 - 2^{x+1}}}$

46- $f(x) = e^{\frac{x+7}{x-3}} - e^{x+1}$

47- $f(x) = 2^{2+3x-2x^2} - 1$

48- $f(x) = \log(2 - x - \sqrt{3-2x})$

49- $f(x) = \sqrt{7-2x} + \sqrt{5} \cdot x$

50- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}}$

51- $f(x) = \sqrt{4 \cdot 3^x + 27 \cdot 2^x - 6^x - 108}$

SOLUZIONI

1) Area di G = $(4 - \pi)\cdot R^2$, area di E = $(\sqrt{3} - \pi/2)\cdot R^2$, area di F = $2(3\sqrt{3} - \pi)\cdot R^2$.
2) $P \equiv (0,10)$, $Q \equiv (8,16)$, $r = 10$, $x^2 + y^2 - 16x - 12y = 0$, $R \equiv (8,-4)$ opp. $R \equiv (16,0)$.
3) $C \equiv (5/2,5/2)$, $r = 5\sqrt{2}/2$, $x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0$.
4) $r = 6$, $C \equiv (12,6\sqrt{3})$, $x^2 + y^2 - 24x - 12\sqrt{3}\,y + 216 = 0$, area $= 27\sqrt{3}$ opp. $9\sqrt{3}$.
5) $C \equiv (\sqrt{65},\sqrt{65})$, $(x - \sqrt{65})^2 + (y - \sqrt{65})^2 = 49$, area = 63, perimetro = 18.
6) $\sqrt{3} + 8\pi/3$.
7) $y = -x + 2 + 2\sqrt{2}$, area $= 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi/2$.
8) $x^2 + y^2 - 4x - 8 = 0$, area $= 2\sqrt{3}$.
9) $x^2 + y^2 - 10x = 0$, $A \equiv (6,-7)$, $B \equiv (12,1)$, $C \equiv (4,7)$, $D \equiv (-2,-1)$.
10) $D \equiv (21,27)$.
11) $x^2 + y^2 - 6x - 2\sqrt{3}\,y + 9 = 0$.
12) $C \equiv (3, \sqrt{3})$.
13) $y = (4x - 1)/3$.
14) $V \equiv (2,2)$, $\alpha = 2\pi/3$, $r = 2$, $C \equiv (2,0)$, aree: $\sqrt{3}$, $(2\pi - 3\sqrt{3})/3$, $(2\pi - 3\sqrt{3})/3$, $(8\pi + 3\sqrt{3})/3$.
15) $8(\pi - 2)$.
16) $4\pi - 3\sqrt{3}$.
17) $2\pi/3$.
18) $C_1 \equiv (4,4)$, $C_2 \equiv (0,-4)$, $C \equiv (5,-3/2)$, $r = 5\sqrt{5}/2$.
19) 7.
20) $y = -x + 3 + 2\sqrt{2}$, area $= 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi/2$.
21) $x^2 + y^2 - 5x + 5/4 = 0$.

22) CE = P = $\mathfrak{R} - \{1\}$.

23) CE = $[-5,3]$, Z = $\{-5,3\}$, P = $]-5,3[$.

24) CE = $]-\infty,1[\cup]2,4]$, Z = $\{4\}$, P = CE $- \{4\}$.

25) CE = $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $Z = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$, $P = \left]-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$.

26) CE = $]-1,2[$, $Z = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$, $P = \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

27) CE = $]-\infty,-1/3[\cup]7,+\infty[$, $Z = \left\{\frac{10-2\sqrt{31}}{3},\frac{10+2\sqrt{31}}{3}\right\}$, $P = \left]-\infty,\frac{10-2\sqrt{31}}{3}\right[\cup \left]\frac{10+2\sqrt{31}}{3},+\infty\right[$.

28) CE = $]-1/2,1[$, $Z = \left\{\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right\}$, $P = \left]-\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right[$.

29) CE = $]-1/2,1[\cup]5,+\infty[$, $Z = \left\{\frac{5-\sqrt{33}}{2},\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}$, $P = \left]-\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right[\cup \left]5,\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right[$.

30) CE = $\Re$-{-1,-1/2,0}, Z = $\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-3}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$,

P = $\left(\left]\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\bigcup\left]\frac{\sqrt{5}-3}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\right)-\{-1,0\}$.

31) CE = $\Re$-{-3,0}, Z = $\{-6-\sqrt{37},\sqrt{37}-6\}$, P = $]-\infty,-6-\sqrt{37}[\bigcup]\sqrt{37}-6,+\infty[$.

32) CE =]-∞,0[∪]1,2[∪]4,+∞[, Z = {-2}, P =]-2,0[∪]4,+∞[.

33) CE = $\Re$- $\left[1-\sqrt{6},1+\sqrt{6}\right]$, Z = {5}, P = ∅.

34) CE = $\Re^+_o$, Z = {0}, P = $\Re^+$.

35) CE =]-∞,-4[∪]-4,-1[, Z = {-10,-2}, P =]-10,-4[∪]-4,-2[.

36) CE = [-1/2,+∞[, Z = {12}, P = [-1/2,12[.

37) CE =]-∞,5[, Z = {-4,1}, P =]-4,1[.

38) CE =]-∞,1]∪[3,+∞[, Z = {-15,5}, P =]-∞,-15[∪]5,+∞[.

39) CE = $\left]\frac{\sqrt{133}-23}{2},\frac{1}{3}\right]$, Z = {-5}, P =]-5,1/3].

40) CE = $\Re$-[1,2], Z = $\{\log_2(3-\sqrt{2}),\log_2(3+\sqrt{2})\}$, P = $\left]-\infty,\log_2(3-\sqrt{2})\right[\bigcup\left]\log_2(3+\sqrt{2}),+\infty\right[$.

41) CE =]0,16]∪[64,+∞[, Z = {16,64}, P = CE − Z.

42) CE = $]0,1/\sqrt{e}\,]\cup[e^2,+\infty[$, Z = $\{1/\sqrt{e}\,,e^2\}$, P = CE − Z.

43) CE = [-5/2,1/3], Z = {-5/2,1/3}, P = CE − Z.

44) CE = $\Re^-_o$, Z = {-1/2}, P =]-∞,-1/2[.

45) CE =]1,3], Z = {3}, P =]1,3[.

46) CE = $\Re$ − {3}, Z = {-2,5}, P =]-∞,-2[∪]3,5[.

47) CE = $\Re$, Z = {-1/2,2}, P =]-1/2,2[.

48) CE =]-∞,3/2]−{1}, Z = $\{-\sqrt{2}\}$, P = $]-\infty,-\sqrt{2}\,[$.

49) CE =]-∞,7/2], Z = {-7/5}, P =]-7/5,7/2].

50) CE = $\Re$−{1,2}, Z = {0,3}, P =]-∞,0[∪]1,2[∪]3,+∞[.

51) CE = [2,3], Z = {2,3}, P = CE − Z.