



27 febbraio 2019 – III Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

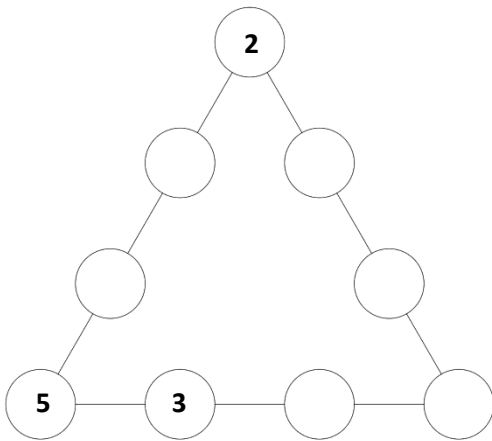
1. Non sfogliate il fascicolo finché non vi viene detto di farlo. Nel foglietto piegato trovate il vostro **numero identificativo**, in modo tale da rendere la correzione dell'elaborato del tutto anonima. **Annotatelo in basso a destra in ogni pagina.**
2. La prova consiste in 7 quesiti, suddivisi in due sezioni.
La prima parte è costituita da tre problemi, ciascuno vale 6 punti. Affinché venga valutata la seconda parte è necessario raggiungere un punteggio maggiore o uguale a 12 punti.
3. La seconda parte comprende 4 problemi, ciascuno dei quali vale 8 punti. Ai fini della classifica verrà considerato solamente il punteggio ottenuto in questa sezione.
4. Ciascun problema prevede una argomentazione o una dimostrazione, le soluzioni dovranno essere formulate in modo chiaro utilizzando gli spazi appositi.

NUMERO IDENTIFICATIVO

I PARTE

1. TRIANGOLI S-MAGICI

Egnazio si diverte a creare triangoli S-magici come quello mostrato in figura per far divertire i suoi nipoti. Il gioco consiste nel riempire con i numeri interi da 1 a 9 i cerchi situati nel triangolo usando ciascun numero una sola volta e in modo tale che le somme dei numeri situati su ogni lato abbiano lo stesso valore S. Gioca anche tu costruendo un triangolo 20-magico.

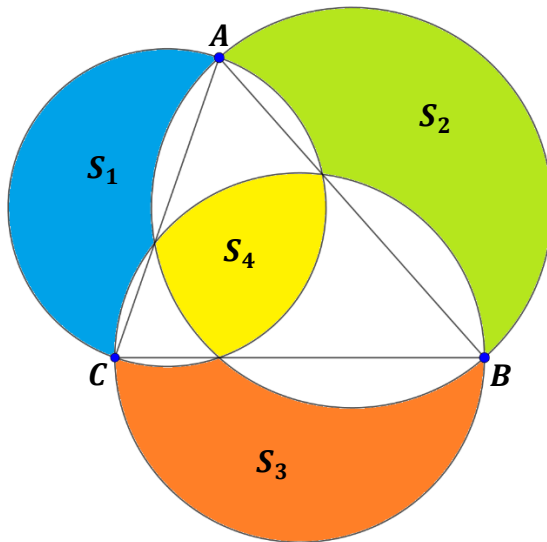


2. AIUOLE GEOMETRICHE

Egnazio, dalla finestra del convento, nota alcune aiuole disposte come in figura. Pensando che tale disposizione non sia casuale, si diverte a studiare le varie forme e scopre la seguente relazione

$$(S_1 + S_2 + S_3) - S_4 = 2S$$

dove S è la superficie del triangolo ABC . Sapresti dimostrarla?



3. DIMOSTRAZIONE SCOLORITA

Egnazio ha ritrovato una vecchia dimostrazione ma il tempo ha cancellato alcune parti, sapresti aiutarlo a ricostruirla?

TEOREMA

Esistono infiniti numeri primi della forma $4k + 3$, con k numero naturale.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo l'insieme costituito dai numeri primi della forma $4k + 3$ con k numero naturale diverso da 0.

Osserviamo che tale insieme è non vuoto poiché ad esempio

Supponiamo che tale insieme sia finito e siano p_1, \dots, p_n i suoi elementi con $3 < p_1 < \dots < p_n$.

Si considerino ora i numeri naturali $M = 4p_1 \cdot \dots \cdot p_n$ e $N = M + 3$.

Da qui segue che $N = 4k + 3$ con $k = p_1 \cdot \dots \cdot p_n$.

Si vede facilmente che 3 non divide N poiché altrimenti $3 \cdot \text{$ M ma ciò è assurdo perché 3 non divide 4 ed è un numero primo diverso da tutti i primi p_1, \dots, p_n .

Poiché $N > p_n$ ed è della forma $4k + 3$ allora necessariamente non è primo; sia quindi $N = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ una sua fattorizzazione con q_1, \dots, q_s primi positivi non necessariamente distinti.

Tutti i primi dispari sono della forma $4k + \text{$ o $4k + 3$, il prodotto di primi della forma $4k + 1$ è del tipo , il prodotto di due primi della forma $4k + 3$ è del tipo $4k + 1$; essendo N della forma $4k + 3$ esisterà quindi un numero dispari di fattori primi di N della forma $4k + 3$.

Sia $q = 4m + 3$ con $m \geq 0$ il minimo di questi fattori.







Se $m = 0$ allora $q = 3$ che è assurdo poiché 3 non divide N .

Se $m > 0$ allora $q = p_j$ per qualche $j \in \{1, \dots, n\}$, q divide M e q divide N e quindi q divide 3 ma ciò è assurdo poiché .

II PARTE

4. CRUCINUMERICO

Egnazio è un appassionato di enigmistica, i suoi tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. Per complicare un po' le cose hanno aggiunto le incognite x e y nelle definizioni. Aiutalo a risolverlo sapendo che x è un numero naturale divisibile per 3 e y è un numero naturale divisibile per 7.

1		2		3
4	5			
	6			
7				8

ORIZZONTALI

4. x
 6. Il coefficiente del termine a^3b^8 nello sviluppo di $(a + b)^{11}$
 7. Il numero di divisori di 36'000'000 che non sono quadrati.
 8. Il minimo numero di somme uguali tra le 8 ottenute addizionando gli elementi di ciascuna riga, ciascuna colonna e delle due diagonali di una tabella 3×3 riempita con i numeri -1 ; 0 e 1.

VERTICALI

1. Il numero di cifre del più piccolo termine della successione 5; 55; 555; 5555; ... divisibile per 495.
 2. Il totale delle cifre di cui è composto il numero
 $N = 1234567891011 \dots 20182019$
 3. Il massimo numero di parti di piano che si ottengono dall'intersezione di 13 rette distinte.
 5. y

5. CODICI SEGRETI

Egnazio ha scelto un codice segreto di 8 cifre e l'ha appuntato in un foglietto. Come molti matematici è un po' distratto e così, giocicchiando con una penna con la mente persa in un problema di teoria dei numeri, ha cancellato le prime due cifre. Ora nel foglietto può leggere solamente

**** 020387**

Per fortuna la sua passione per i numeri gli aveva fatto osservare che il codice era un multiplo di 153. Puoi aiutare Egnazio a ricordarlo?

NUMERO IDENTIFICATIVO

6. DISTANZE POLINOMIALI

Egnazio, appassionato di cartografia, viene contattato dal suo amico matematico che, volendo intraprendere un viaggio fino a Granada partendo da Perugia, vorrebbe conoscere la distanza che dovrà percorrere. Egnazio gliela fornisce in forma indiretta dicendogli:

“La distanza, espressa in chilometri che dovrai percorrere corrisponde al valore in zero del polinomio a coefficienti reali di grado 2019 che soddisfa le seguenti condizioni:

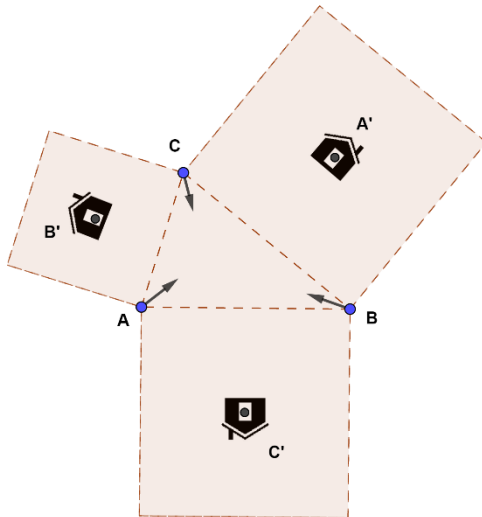
$$p(1) = 3;$$

$$p(2) = p(3) = \dots = p(2020)=2.”$$

Quanti chilometri dovrà percorrere il suo amico?

7. CI INCONTREREMO?

Egnazio, Girolamo e Vincenzo si trovano in tre punti della città di Perugia come nei vertici A , B , C di un triangolo acutangolo. Ciascuno di loro si incammina, spostandosi in linea retta, verso la propria abitazione che si trova al centro della piazza quadrata posta esternamente al triangolo di fronte alla posizione occupata inizialmente (v. figura). Pensi che i loro percorsi passeranno per uno stesso punto?



NUMERO IDENTIFICATIVO