UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 23.11.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = x^2 - \log(x^2)$$
specificando esattamente: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{f(n)}{n^4}.$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, calcolare l'area della regione del piano determinata dal grafico della funzione
$$g(x) = \frac{f(x)}{x},$$
sull'intervallo $[1, e]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R \setminus \{0\}$. Essendo poi $\log t < t$ per ogni $t > 0$, la funzione é sempre positiva in D. Non ci sono quindi intersezioni con gli assi. Infine si puó osservare che f é simmetrica rispetto all'asse y e quindi lo studio puó essere effettuato per $x > 0$ e poi riportare i dati (simmetricamente) sulla semiretta negativa. Per quanto riguarda gli eventuali asintoti si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

ed anche

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

dunque non esistono asintoti obliqui né orizzontali. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,$$

e quindi la retta $x = 0$ é un asintoto verticale.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\frac{x^2-1}{x}, \qquad (x \neq 0).$$

Se $x > 0$, la derivata si annulla per $x = 1$ e $f'(x) < 0$ se $x \in]0, 1[$, mentre $f'(x) > 0$ se $x > 1$. Dunque f é crescente in $[1, +\infty[$ e decrescente in $]0, 1]$. Pertanto $x = 1$ é un punto di minimo relativo (in tal caso anche assoluto) e $f(1) = 1$. Analogamente, per simmetria, f é decrescente in $]-\infty, -1[$ e crescente in $[-1, 0[$ e quindi $x = -1$ é punto di minimo relativo (ed assoluto) con $f(-1) = 1$.

Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta:

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}, \qquad (x \neq 0)$$

e risulta $f''(x) > 0$, per ogni $x \in D$. La f é dunque convessa in $]0, +\infty[$ e convessa in $]-\infty, 0[$. Non ci sono pertanto punti di flesso

Il grafico ora puó essere tracciato.

2. La serie é a segni alterni, perché $f(n) > 0$ per ogni $n \in I\!N$. La serie dei valori assoluti é data dalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \log(n^2)}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 2\frac{\log n}{n^4} \right).$$

Tale serie risulta convergente perché é maggiorata dalla serie armonica generalizzata di termine generale $1/n^2$. Pertanto la serie di partenza é assolutamente (e quindi semplicemente) convergente.

3. Si tratta di calcolare il seguente integrale

$$A = \int_1^e \left(x - \frac{2\log x}{x} \right) dx.$$

Si ha facilmente

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \log^2 x \right]_1^e = \frac{e^2 - 3}{2}.$$