UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 22.11.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D xy\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x, y) \in I\!R^2 : x > 0, y > 0, 1 \le y/x \le 2, 1 \le xy \le 2\}$.

2. Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (\sin(x + y) + x\cos(x + y))dx + x\cos(x + y)dy$$

ed in caso affermativo determinare le primitive.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy^2 + x + (x^2y - y)y' = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Conviene utilizzare il seguente cambiamento di variabili $u = xy$, e $v = y/x$. Si ha:

$$\sqrt{\frac{u}{v}} = x, \ \sqrt{uv} = y.$$

E' facile vedere che il nuovo dominio delle variabili (u, v) é dato da $E = [1, 2]^2$. Inoltre per il determinante della matrice Jacobiana, si ha

$$\det J(u, v) = \frac{1}{2v}, \qquad (u, v) \in E.$$

Pertanto,

$$I = \iint_E u \frac{1}{2v} dudv = \int_1^2 udu \int_1^2 \frac{1}{2v} dv = \frac{3}{4} \log 2.$$

2. Il dominio, essendo tutto il piano $\mathbb{R}^2$, é un insieme convesso. Pertanto per verificare l'esattezza é sufficiente studiare la chiusura. Si vede facilmente che la forma é chiusa e quindi ω é esatta. Determiniamo ora le primitive. Se F é una primitiva, allora dalla $\partial F/\partial y = x \cos(x + y)$, si ha

$$F(x, y) = \int x \cos(x + y) dy = x \sin(x + y) + h(x).$$

Inoltre dalla $\partial F/\partial x = \sin(x + y) + x \cos(x + y)$ si ha subito $h'(x) = 0$, cioé $h(x) = c$, con c costante. La famiglia delle primitive é quindi data dalla

$$F(x, y) = x \sin(x + y) + c.$$

3. L'equazione é a variabili separabili. Infatti essa puó essere scritta nella forma:

$$y' = -\frac{x(y^2 + 1)}{y(x^2 - 1)}.$$

Separando le variabili ed integrando si ha

$$\int \frac{y}{y^2 + 1} dy = -\int \frac{x}{x^2 - 1} dx,$$

da cui, per $x > 1$, si ha

$$\log(y^2 + 1)^{1/2} = \log(x^2 - 1)^{-1/2} + c \leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} = \frac{e^c}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

cioé

$$y^2 = \frac{e^{2c}}{x^2 - 1} - 1.$$

Tenendo conto che $y(2) = 1 > 0$, otteniamo infine $c = (\log 6)/2$ e la soluzione é quindi data da:

$$y(x) = \sqrt{\frac{6}{x^2 - 1} - 1}.$$