UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 01.02.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{1 - \log x}{\log^2 x}$$
specificando: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico. Esistono massimi e/o minimi assoluti?

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, discutere la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{e^n}\right).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare tutte le primitive della funzione
$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$
sull'intervallo $]e, +\infty[$. Determinare infine la primitiva che si annulla in $x = e^2$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!\!R^+ \setminus \{1\}$, cioé l'insieme dei reali positivi ad eccezione del punto $x = 1$. La funzione é positiva se e solo se $0 < x < 1$ e $1 < x < e$, mentre é negativa se $x > e$. La funzione si annulla nel punto $x = e$ e il punto $(e, 0)$ é l'unica intersezione con gli assi.

Per quanto riguarda la ricerca di eventuali asintoti si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Quindi la retta $x = 1$ é un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale. Non ci sono altri asintoti.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta, per $x \in D$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x \log^4 x}(2 \log x - \log^2 x) = \frac{\log x - 2}{x \log^3 x}.$$

Si ha che $f'(x) > 0$ se $0 < x < 1$ e $e^2 < x < +\infty$, mentre $f'(x) < 0$ se $1 < x < e^2$. Inoltre $f'(x) = 0$ se e solo se $x = e^2$. Dunque f é crescente negli intervalli $]0, 1[$ e $[e^2, +\infty[$, mentre decresce in $]1, e^2]$. Il punto $x = e^2$ á allora un punto di minimo relativo e si ha $f(e^2) = -1/4$. Infine, per studiare il comportamento della derivata vicino al punto $x = 0$, osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty,$$

pertanto il grafico "esce" dall'origine con tangente verticale (l'asse y). Si osservi che dallo studio fin qui effettuato, il punto $x = e^2$ é anche un punto di minimo assoluto e che non esistono punti di massimo.

Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta, con facili calcoli,

$$f''(x) = \frac{6 - \log^2 x}{x^2 \log^4 x}, \quad x \in D.$$

Si ha che $f''(x) > 0$ se e solo se $e^{-\sqrt{6}} < x < 1$ e $1 < x < e^{\sqrt{6}}$ mentre $f''(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e^{-\sqrt{6}}$ e $x > e^{\sqrt{6}}$. Pertanto la f é convessa negli intervalli $[e^{-\sqrt{6}}, 1[$ e $]1, e^{\sqrt{6}}]$ e concava negli intervalli $]0, e^{-\sqrt{6}}]$ e $[e^{\sqrt{6}}, +\infty[$. I punti $x = e^{-\sqrt{6}}$ e $x = e^{\sqrt{6}}$ sono punti di flesso. Inoltre

$$f(e^{\sqrt{6}}) = \frac{1-\sqrt{6}}{6}, \quad f(e^{-\sqrt{6}}) = \frac{1+\sqrt{6}}{6}.$$

Il grafico ora puó essere tracciato agevolmente.

2. La serie da studiare é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{e^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^3}.$$

Tale serie risulta a termini positivi ed applicando il criterio degli infinitesimi con $p = 2$ si ha subito la convergenza. Infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1+n}{n^3} = 1.$$

3. Occorre determinare l'integrale indefinito

$$I = \int \frac{1-\log x}{x \log^2 x} dx,$$

sull'intervallo $]e, +\infty[$. Operando la sostituzione $\log x = t$ si ha facilmente

$$I = \int \frac{1-t}{t^2} dt = -\frac{1}{t} - \log t + c,$$

da cui la famiglia delle primitive é data da

$$P(x) = -\frac{1}{\log x} - \log(\log x) + c, \quad x > e.$$

Si osservi che $P(x)$ é ben definito per $x > e$. Ora per trovare la primitiva che si annulla in $x = e^2$ sostituendo nella precedente relazione, si ottiene subito $c = \log 2 + 1/2$. La primitiva richiesta é quindi

$$P(x) = -\frac{1}{\log x} - \log(\log x) + \log 2 + \frac{1}{2}, \quad x > e.$$