Prova scritta di Geometria 2 / Matematica discreta - 15.02.2019 -

- Corso di Laurea Ingegneria Informatica ed Elettronica -

---

1. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

stabilire che essa è diagonalizzabile e determinare la matrice diagonalizzante.

Si ha $p_A(t) = (2-t)^2(3-t)(5-t)$, pertanto gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 5.$$

Per determinare l'autospazio dell'autovalore 2 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}.$$

Segue che $V_2 =< (1,0,0,0), (0,0,0,1) >$ e la matrice è diagonalizzabile. Si vede che una base di autovalori di A è data da

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (1,2,1,0)\},$$

e risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\ldots$

2. Determinare in $\mathbb{C}^3$ il prodotto Hermitiano rispetto al quale la base

$$B = \{v_1 = (i,0,0), v_2 = (0,-2i,1), v_3 = (1,1,0)\}$$

risulti ortonormale.

Denotato con $*$ il prodotto cercato, si dovrà avere

$$v_1 * v_2 = v_1 * v_3 = v_2 * v_3 = 0$$

ed anche

$$v_1 * v_1 = v_2 * v_2 = v_3 * v_3 = 1.$$

Per un vettore $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ si ha

$$(x_1, x_2, x_3) = (-ix_1 + ix_2 - 2x_3)v_1 + zv_2 + (x_2 + 2ix_3)v_3.$$

Allora:

$$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) =$$

$$= (-ix_1 + ix_2 - 2x_3, x_3, x_2 + 2ix_3) \cdot (-iy_1 + iy_2 - 2y_3, y_3, y_2 + 2iy_3) =$$

$$\text{(prodotto Hermitiano canonico)}$$

$$= x_1y_1 - x_1y_2 + 2ix_1y_3 + x_2y_2 - 4ix_2y_3 + 2ix_3y_1 + 4ix_3y_2 + 9x_3y_3.$$

3. Determinare in S_8 il sottogruppo generato dalla permutazione

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$

e determinare se tale sottogruppo è normale in S_8.

$\tau = (356)(2418)$ ha periodo 12. Allora $< \tau >$ è costituito dall'identità, da τ stessa e dalle permutazioni :

$$\tau^2 = (365)(12)(48), \quad \tau^3 = (1248), \quad \tau^4 = (356), \quad \tau^5 = (365)(2418)$$
$$\tau^6 = (21)(48), \quad \tau^7 = (356)(1423), \quad \tau^8 = (365), \quad \tau^9 = (2418),$$
$$\tau^{10} = (356)(21)(48), \quad \tau^{11} = (365)(1428).$$

Se si considera, ad es., la permutazione $\sigma = (37)$ si ha che

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = (37)(356)(2418)(37) = (567)(1824) \neq < \tau >,$$

il che prova che $< \tau >$ non è normale in S_8.