EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1 Primo ordine - variabili separabili

Sia dato il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si proceda come segue

(1) Si calcolino le radici dell'equazione $b(y) = 0$. Per ogni radice k si controlli se la funzione $y(x) = k$ è soluzione del problema.

(2) Si costruisca la funzione

$$F(x,y) = \int \frac{1}{b(y)} dy - \int a(x) dx$$

(3) Si scriva la relazione $F(x,y) = c$ e si ricavi y in funzione di x e di c.

(4) Si imponga la condizione $y(x_0) = y_0$ per ricavare c

2 Primo ordine - lineari

Sia dato il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si proceda come segue

(1) Si calcoli una primitiva $A(x)$ di $a(x)$.

(2) Si costruisca la funzione

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[\left(\int e^{A(x)} b(x) dx \right) + c \right]$$

(3) Si calcoli l'integrale $\int e^{A(x)} b(x) dx$. In questo modo si determina $y(x)$.

(4) Si imponga la condizione $y(x_0) = y_0$ per ricavare c

3 Primo ordine - Manfredi

Sia dato il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si proceda come segue

(0) Si ponga $z = \frac{y}{x}$. L'equazione differenziale diventa allora

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

che chiaramente è un'equazione a variabili separabili con

$$a(x) = \frac{1}{x}, \qquad b(z) = f(z) - z$$

(1) Si calcolino le radici dell'equazione $f(z) - z = 0$. Per ogni radice k si controlli se la funzione $y(x) = kx$ è soluzione del problema.

(2) Si costruisca la funzione

$$F(x, z) = \int \frac{1}{f(z) - z} dz - \int \frac{1}{x} dx$$

(3) Si scriva la relazione $F(x, z) = c$ e si ricavi z in funzione di x e di c.

(4a) Si sostituisca a z il rapporto $\frac{y}{x}$, ricavando quindi y in funzione di x e c

(4b) Si imponga la condizione $y(x_0) = y_0$ per ricavare c

4 Primo ordine - Bernoulli

Sia dato il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x)y^n \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si proceda come segue

(*) Se $y_0 = 0$, allora la soluzione è $y = 0$.

(0) Si ponga $z = y^{1-n}$. L'equazione differenziale diventa allora

$$z' + p(x)(1-n)z = q(x)(1-n)$$

che chiaramente è un'equazione lineare con

$$a(x) = p(x)(1-n), \qquad b(x) = q(x)(1-n)$$

(1) Si calcoli una primitiva $P(x)$ di $p(x)(1-n)$

(2) Si costruisca la funzione

$$z(x) = e^{-P(x)} \left[\left(\int e^{P(x)} (q(x)(1-n)) \right) + c \right]$$

(3) Si calcoli l'integrale $\int e^{P(x)} q(x)(1-n)dx$. In questo modo si determina $z(x)$.

(4a) Si sostituisca $y = z^{\frac{1}{1-n}}$, ricavando y in funzione di x e c.

(4b) Si imponga la condizione $y(x_0) = y_0$ per ricavare c

5 Secondo ordine - Lineari omogenee

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' + by' + cy = 0$$

Siano α_1 e α_2 le radici (in $\mathbb{C}$) del polinomio $T^2 + bT + c$. Se $\alpha_1 \neq \alpha_2$, allora due soluzioni (possibilmente complesse) linearmente indipendenti dell'equazione sono

$$z_1(x) = e^{\alpha_1 x} \qquad z_2(x) = e^{\alpha_2 x}.$$

Per ottenere soluzioni reali basta considerare

$$y_1(x) = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} \qquad y_2(x) = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i}.$$

Se invece $\alpha_1 = \alpha_2$, allora $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, e due soluzioni reali linearmente indipendenti sono

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x} \qquad y_2(x) = xe^{\alpha_1 x}.$$

Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea si ottengono poi come combinazioni lineari di y_1 e y_2, ovvero

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Allo stesso risultato si può giungere per altra via, che non usa i numeri complessi, ma che è più difficile da ricordare. Si distinguono tre casi a seconda delle radici del polinomio $T^2 + bT + c$.

5.1 Caso 1 - due radici reali e distinte ($b^2 - 4c > 0$)

Siano α_1 e α_2 le radici di $T^2 + bT + c$. Allora le soluzioni dell'equazione sono

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

5.2 Caso 2 - due radici reali e coincidenti ($b^2 - 4c = 0$)

Sia α l'unica radice reale di $T^2 + bT + c$. Allora le soluzioni dell'equazione sono

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$$

5.3 Caso 3 - due radici complesse e coniugate ($b^2 - 4c < 0$)

Si ponga $\alpha = -\frac{b}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}$. Allora le soluzioni dell'equazione sono

$$c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

6 Secondo ordine - Lineari non omogenee

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' + by' + cy = f(x)$$

Si cerca una soluzione dell'equazione $\bar{y}(x)$. Tutte le soluzioni si ottengono da questa sommando le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' + by' + cy = 0$ (calcolate come nel paragrafo 5).

Esaminiamo diversi casi a seconda della forma di $f(x)$.

6.1 $f(x)$ polinomio di grado m

- Se $c \neq 0$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra i polinomi di grado m
- Se $b \neq 0$, $c = 0$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra i polinomi di grado m moltiplicati per x
- Se $b = 0$, $c = 0$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra i polinomi di grado m moltiplicati per x^2

6.2 $f(x) = ke^{\lambda x}$, con k reale e λ complesso

- Se λ non è radice di $T^2 + bT + c$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra le funzioni $re^{\lambda x}$
- Se λ è una delle due radici distinte di $T^2 + bT + c$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra le funzioni $rxe^{\lambda x}$
- Se λ è la sola radice di $T^2 + bT + c$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra le funzioni $rx^2e^{\lambda x}$

Si noti che grazie all'identità

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$$

rientrano in questa categoria tutti i seguenti casi:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} & f(x) = \sin \beta x, \quad \beta \in \mathbb{R} \\ f(x) = \cos \beta x, \quad \beta \in \mathbb{R} & f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} & \end{array}$$

Ad esempio, se $f(x)$ fosse $e^{3x} \sin 5x$, si cerchi una soluzione dell'equazione

$$y^{''} + by^{'} + c = e^{(3+5i)x} = e^{3x}(\cos 5x + i \sin 5x).$$

Tale soluzione si scriva poi nella forma $f_1(x) + if_2(x)$, con f_1 e f_2 reali (in altre parole, si separino la sua parte reale e la sua parte immaginaria). Chiaramente allora $y = f_2(x)$ risolve l'equazione data.

6.3 $f(x) = p_m(x)e^{\lambda x}$, con $p_m(x)$ polinomio di grado m

- Se λ non è radice di $T^2 + bT + c$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra le funzioni $q_m(x)e^{\lambda x}$, con $q_m(x)$ polinomio di grado m.
- Se λ è una delle due radici distinte di $T^2 + bT + c$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra le funzioni $xq_m(x)e^{\lambda x}$, con $q_m(x)$ polinomio di grado m.
- Se λ è la sola radice di $T^2 + bT + c$, si cerca la soluzione $\bar{y}(x)$ fra le funzioni $x^2 q_m(x)e^{\lambda x}$, con $q_m(x)$ polinomio di grado m.

Esaminiamo ora un procedimento valido in generale, ma senza dubbio più complicato.

6.4 Metodo di variazione delle costanti

Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea. Allora si cerca $\bar{y}(x)$ nell'insieme delle funzioni

$$c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{1}$$

(come si vede, c_1 e c_2 non sono più costanti ma variabili, da cui il nome del metodo).

Si può dimostrare facilmente che se le funzioni $c_1(x)$ e $c_2(x)$ soddisfano il seguente sistema, allora la funzione (1) è soluzione dell'equazione data:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Questo sistema, per ogni x appartenente al dominio di f, è di Cramer nelle incognite $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$: infatti se il determinante della matrice associata

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

si annullasse, allora $y_2'(x)y_1(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$, ovvero

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = 0.$$

Ma questo non si verifica in nessun caso, essendo (in virtù dei risultati del paragrafo 5)

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = e^{(\alpha_1-\alpha_2)x} \quad \text{oppure} \quad \frac{y_2(x)}{y_1(x)} = x.$$

Pertanto per trovare $c_1(x)$ e $c_2(x)$ basta risolvere il sistema (2) con la regola di Cramer, trovare così $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$, e quindi le loro primitive procedendo ad un'operazione di integrazione.

Come esercizio, si trovi una formula per calcolare una soluzione di

$$y'' + \omega y = f(x).$$

7 Sistemi di equazioni differenziali

Supponiamo di dover risolvere un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine del seguente tipo

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) + b_2(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

dove tutte le funzioni sono definite e continuie in un dato intervallo I.

Fissiamo le seguenti notazioni: $Y = (y_1(x), \ldots, y_n(X))$, $Y' = (y_1'(x), \ldots, y_n'(x))$, $B(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$.

Allora il sistema dato, in forma compatta, si può scrivere come

$$(Y')^t = AY^t + B^t,$$

essendo A la matrice $A = (a_{ij}(x))$.

Chiamiamo L l'applicazione

$$(C^1(I))^n \to (C^0(I))^n, \qquad Y \mapsto (Y')^t - AY^t.$$

Si verifica facilmente che L è lineare. Inoltre risolvere il sistema dato equivale a risolvere l'equazione

$$L(Y) = B^t.$$

Analogamente al caso delle equazioni lineari del secondo ordine, ogni soluzione dell'equazione data si può allora esprimere come somma di una soluzione dell'equazione omogenea $L(Y) = 0$ e di una fissata soluzione $\bar{Y}$ dell'equazione data.

Le condizioni iniziali in questo caso si esprimono nella forma $Y(x_0) = Y_0$ per qualche $x_0 \in I$. Il problema di Cauchy associato ha ancora un'unica soluzione. Questo implica che il nucleo di L ha dimensione pari a n. Pertanto, per calcolare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $L(Y) = 0$ è sufficiente trovare n soluzioni indipendenti.

Tali soluzioni si cercano di tipo

$$Y = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) = (c_1 e^{\lambda x}, \ldots, c_n e^{\lambda x}), \qquad c_j \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Infatti si noti che per tali n-ple di funzioni si ha

$$L(Y) = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

ovvero, $(c_1, \ldots, c_n)$ è autovettore di A di autovalore λ.

Nel caso in cui la matrice A sia diagonalizzabile sul campo dei numeri complessi, n soluzioni indipendenti si trovano facilmente:

- per ogni autovalore reale λ si considerino i vettori di una base dell'autospazio relativo a λ; per ogni vettore reale $(c_1, \ldots, c_n)$ di tale base si ha una soluzione di tipo
$$Y = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) = (c_1 e^{\lambda x}, \ldots, c_n e^{\lambda x})$$
- per ogni coppia coniugata di autovalori complessi ma non reali, diciamo λ e $\bar{\lambda}$, si consierino ancora i vettori di una base dell'autospazio relativo a λ; per ogni vettore $(c_1, \ldots, c_n)$ di tale base si hanno due soluzioni di tipo
$$Y = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) = \frac{1}{2}(c_1 e^{\lambda x} + \bar{c}_1 e^{\bar{\lambda} x}, \ldots, c_n e^{\lambda x} + \bar{c}_n e^{\bar{\lambda} x})$$
$$Y = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) = \frac{1}{2i}(c_1 e^{\lambda x} - \bar{c}_1 e^{\bar{\lambda} x}, \ldots, c_n e^{\lambda x} - \bar{c}_n e^{\bar{\lambda} x})$$