

ESERCIZI SVOLTI SU: GEOMETRIA TRIDIMENSIONALE

1. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare un'equazione omogenea del piano parallelo al vettore $v = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, passante per il punto $P = (1, 2, 1)$ e parallelo alla retta

$$s : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO Il generico piano ha equazione $ax + by + cz + d = 0$. Tenendo conto che le coordinate di v sono $(1, 0, 1)$, imponendo il parallelismo con v si ha che

$$a + c = 0.$$

Imponendo il passaggio per P si ha

$$a + 2b + c + d = 0,$$

e infine, tenendo conto che parametri direttori di s sono $(1, 1, 0)$, il parallelismo con s si ha imponendo

$$a + b = 0.$$

Risolvendo il sistema in a, b, c, d si ottengono le infinite quaterne $(a, -a, -a, 2a)$ e quindi le infinite equazioni

$$ax - ay - az + 2a = 0$$

che evidentemente descrivono lo stesso piano $x - y - z + 2 = 0$.

2. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, si determinino i vettori di modulo $\sqrt{13}$ paralleli al piano $3x - 2z - 5 = 0$ e ortogonali all'asse y .

SVOLGIMENTO Il generico vettore geometrico ha coordinate (α, β, γ) . Imponendo il parallelismo con il piano $3x - 2z - 5 = 0$ si ha la condizione

$$3\alpha - 2\gamma = 0,$$

mentre imponendo l'ortogonalità con l'asse y (che ha evidentemente parametri direttori $(0, 1, 0)$) si ha

$$\beta = 0.$$

Pertanto il generico vettore che soddisfa le prime due condizioni è di tipo $(\frac{2}{3}\gamma, 0, \gamma)$. Imponendo la condizione sul modulo si ottiene

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\gamma\right)^2 + 0^2 + \gamma^2} = \sqrt{13}$$

ovvero

$$\frac{13}{9}\gamma^2 = 13$$

e quindi $\gamma = \pm 3$. Pertanto i vettori cercati saranno due, e precisamente $(2, 0, 3)$ e $(-2, 0, -3)$.

3. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, e considerate le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ z + y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

determinare se esistono un punto R di r e un punto S di s tali che la retta per essi sia parallela ai piani

$$\alpha : x - 3z + 2 = 0 \quad \beta : 2x - y = 1.$$

SVOLGIMENTO Generico punto di r : $R = (2, y, -y)$. Generico punto di s : $S = (t - 2, t, 2t - 1)$. I parametri direttori della retta per R e Q sono la differenza delle coordinate di S meno quelle di R , ovvero

$$(l, m, n) = (t - 4, t - y, 2t + y - 1).$$

Imponendo il parallelismo con i due piani si avranno le due condizioni

$$l - 3n = 0 \quad 2l - m = 0$$

ovvero

$$t - 4 - 3(2t - y - 1) = 0, \quad 2(t - 4) - (t - y) = 0.$$

Pertanto, risolvendo il seguente sistema in t e y si perviene alla soluzione dell'esercizio:

$$\begin{cases} -5t + 3y = 1 \\ t + y = 8 \end{cases}$$

4. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni parametriche della retta passante per $P = (1, 3, 0)$, parallela al piano yz e al piano $x + y + z = 0$.

SVOLGIMENTO La retta giace sui seguenti due piani:

- il piano π_1 , parallelo al piano yz e passante per P
- il piano π_2 , parallelo al piano $x + y + z = 0$ e passante per P

La retta sarà descritta come intersezione di π_1 e π_2

Determiniamo π_1 . Il piano yz ha equazione $x = 0$, e pertanto i piani ad esso paralleli saranno tutti e soli quelli di equazione

$$x = k.$$

Imponendo il passaggio per P si ha $k = 1$, e quindi $\pi_1 : x = 1$.

Determiniamo π_2 . I piani paralleli a $x + y + z = 0$ saranno tutti e soli quelli di equazione

$$x + y + z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per P si ha $k = -4$, e quindi $\pi_2 : x + y + z - 4 = 0$.

Pertanto equazioni cartesiane della retta cercata saranno

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

che facilmente si possono trasformare in equazioni parametriche.

5. *Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (0, 2, 3)$, parallela al piano $x - 2z = 0$ e incidente la retta*

$$s : \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = t - 2 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO La retta giace sui seguenti due piani:

- il piano π_1 , parallelo al piano $x - 2z = 0$ e passante per P
- il piano π_2 , contenente la retta s e passante per P

La retta sarà descritta come intersezione di π_1 e π_2 .

Il piano π_1 si può determinare come nell'esercizio precedente, e risulta

$$\pi_1 : x - 2z + 6 = 0.$$

Determiniamo π_2 . Equazioni cartesiane di s si ottengono facilmente, e sono

$$s : \begin{cases} x - 3y = 0 \\ z - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Pertanto, i piani contenenti la retta s sono tutti e soli quelli di equazione

$$x - 3y + k(z - y + 2) = 0,$$

cui va aggiunto il piano $z - y + 2 = 0$. Imponendo il passaggio per P si ottiene $k = 2$, e quindi

$$\pi_2 : x - 5y + 2z + 4 = 0$$

Equazioni cartesiane della retta cercata sono pertanto

$$r : \begin{cases} x - 2z + 6 = 0 \\ x - 5y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare due vettori geometrici u e v , il primo parallelo al piano xy ed il secondo parallelo alla retta

$$s : \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

tali che $u + v = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SVOLGIMENTO Scriviamo i due vettori geometrici in forma generica:

$$u = (u_x, u_y, u_z), \quad v = (v_x, v_y, v_z).$$

Imponiamo il parallelismo di u con il piano xy . Avendo il piano xy equazione $z = 0$, la condizione di parallelismo diventa

$$u_z = 0.$$

La retta s ha parametri direttori $(3, 1, 2)$. Quindi imponendo il parallelismo di v con s si ottiene

$$v_x = 3k, \quad v_y = k, \quad v_z = 2k.$$

Infine, imponiamo l'ultima condizione tenendo conto del fatto che le coordinate di $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sono $(1, 1, 2)$:

$$\begin{cases} u_x + 3k = 1 \\ u_y + k = 1 \\ 0 + 2k = 2 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione segue immediatamente $k = 1$, e quindi $u_y = 0$ e $u_x = -2$. Pertanto

$$u = (-2, 0, 0), \quad v = (3, 1, 2).$$

ESERCIZI PROPOSTI SU: GEOMETRIA TRIDIMENSIONALE

1. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni parametriche della retta passante per il punto $P = (3, 1, 1)$ ed incidente le due rette

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

2. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, e assegnati i vettori geometrici di coordinate

$$v_1 = (0, 4, 0), \quad v_2 = (2, 0, 1), \quad v_3 = (0, -1, 3),$$

determinare un vettore u complanare con i primi due ed uno, w , parallelo a v_3 , tali che

$$u + v = (3, 1, 0).$$

3. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallelo alle rette

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

4. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni parametriche della retta ortogonale al piano

$$\pi : x + 2y - z + 1 = 0$$

e passante per il punto di intersezione del piano xy con la retta

$$s : \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ -y + 3z = -2 \end{cases}$$

5. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (4, 1, 0)$, parallela al piano $3x - 2y = 0$ e al piano yz .
6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, si determinino i vettori di modulo 1 paralleli al piano $3x - 2y - 5 = 0$ e al piano $y + z - 1 = 0$
7. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni cartesiane della retta passante per $P = (-1, 2, 3)$ parallela al piano $\pi : 3x - 2y + 7z = -1$ e incidente la retta

$$s : \begin{cases} x = 2z - 9 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

8. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni cartesiane della retta passante per $P = (1, 0, 1)$, parallela al piano $\pi : x - 2y + z + 1 = 0$ ed incidente la retta

$$s : \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

9. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni parametriche della retta passante per il punto $R = (2, 0, 1)$, parallela al piano xy e al piano $x + 2y - z = 0$.
10. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, scrivere equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (0, 1, 3)$, parallela al piano $x - y + z = 0$ e incidente la retta

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$$

11. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, e considerate le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 \\ z = t + 1 \end{cases}$$

determinare se esistono un punto R di r e un punto S di s tali che la retta per essi sia parallela ai piani

$$\alpha : 2x - y = 0 \quad \beta : y - z = 1.$$

12. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, si considerino il piano $\pi : y - z = 0$ e la retta

$$s : \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Dato il vettore geometrico $v = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, determinarne altri due, u e w , rispettivamente paralleli a π ed s , tali che

$$u + w = v.$$

13. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $(1, 1, 2)$, parallela al piano $y + z = 0$ e incidente la retta

$$s : \begin{cases} x = -4t \\ y = t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$$