Calcolo stocastico senza probabilita'

DOMENICO CANDELORO

13/05/2006

1 Introduzione

In questa nota intendiamo presentare brevemente alcune ricerche, evolutesi principalmente negli ultimi anni, volte a svincolare la teoria dell'Integrazione Stocastica (e il conseguente Calcolo Stocastico) dalle pesanti strutture di natura probabilistica che usualmente la condizionano.

Com'é ben noto, la principale difficolta' nell'introdurre l'integrale stocastico risiede nella non derivabilita' delle traiettorie del Moto Browniano: é dunque necessario uno strumento essenzialmente diverso dall'integrazione alla Stieltjes.

La teoria sviluppata da Ito negli anni '40 si é dimostrata adeguata allo scopo, come dimostrano le numerose e importanti applicazioni dell'Integrale di Ito e delle sue varianti (Stratonovich, Backward, etc.). Tuttavia, proprio a causa delle sue svariate possibilita' di applicazione, e generalizzazione, si avverte la necessita' di semplificare questa teoria, cercando da una parte di costruire in maniera piu' elementare un integrale del tipo di Stieltjes, e dall'altra di estendere le principali regole di calcolo (Formula di Ito) anche in ambito piu' astratto.

Uno dei primi tentativi di un certo rilievo é dovuto a Caccioppoli, che affronto' essenzialmente il primo problema, completamente svincolato da elementi di natura probabilistica, ottenendo una definizione valida di integrale alla Stieltjes, e una caratterizzazione delle funzioni integrabili in termini di assoluta continuita'.

Piu' numerosi sono stati gli approcci al secondo problema: l'idea di base é che un processo stocastico puo' essere visto come una funzione, definita su uno spazio elementare (ad esempio un intervallo) e a valori in uno spazio funzionale (L_1 o L_2, per esempio): dunque il problema consiste nel costruire una teoria d'integrazione per funzioni del genere rispetto ad altre funzioni dello stesso tipo, dotate di particolari proprieta'.

Non ci dilungheremo sulle numerose e proficue trattazioni del problema sotto questo profilo, nelle quali in sostanza lo spazio funzionale é un generico spazio di Banach, o di Hilbert.

Piu' recentemente si sono sviluppate alcune indagini secondo questa linea, ma incentrate su spazi (o algebre) di Riesz anziché di Banach: questo perché la struttura d'ordine da un lato rende piu' semplice la trattazione dei limiti, dall'altro la generalizza, introducendo concetti di convergenza non necessariamente topologici, ma ugualmente importanti, quali la convergenza quasi ovunque. Nei lavori [7, 8, 9] si sono interpretati processi stocastici e altri concetti di natura probabilistica come successioni in opportuni spazi di Riesz, operatori di proiezione, etc., ottenendo formulazioni astratte e abbastanza semplici di teoremi classici di convergenza. Nei lavori [1, **?**], si é definita una teoria d'integrazione per funzioni a valori in spazi di Riesz, giungendo a dedurre teoremi di esistenza per l'integrale stocastico, formule del tipo di Ito, e alcune applicazioni ai differenziali stocastici.

2 L'integrale di Caccioppoli

Caccioppoli, in [5], diede una definizione di integrale alla Stieltjes, rispetto a funzioni continue ma di variazione illimitata, nell'ambito delle funzioni reali. Benché probabilmente l'Autore avesse altri scopi, la sua definizione si puo' adattare abbastanza bene a problemi di Calcolo stocastico, anche se non fornisce direttamente l'Integrale di Ito, ma la sua variante di Stratonovich.

Non possiamo qui descrivere in dettaglio la costruzione precisa dell'integrale proposto da Caccioppoli: una descrizione esauriente é contenuta nei due lavori [3] e [4].

Ci limiteremo qui a descrivere brevemente le linee principali della costruzione. Intanto, si suppone che f e g siano due funzioni misurabili, definite su un intervallo reale $[a, b]$ e a valori in $I\!R$. su g si fa l'ipotesi di continuita', mentre su f si richiede la limitatezza.

Il concetto fondamentale su cui si basa la costruzione di Caccioppoli é quallo di *successione generatrice.*

Definizione 2.1 Assumiamo per semplicita' che g sia di variazione illimitata su ogni sottointervallo di $[a, b]$). Una successione $(g_n)_n$ di funzioni definite su $[a, b]$ e a valori reali é detta *successione generatrice*) per g se sussistono le seguenti proprieta':

1. g_n sia di variazione limitata per ogni n.

2. Per ogni n, detto A_n l'insieme degli $x \in]a, b[$ tali che $g'_n(x) = 0$, l'insieme A_n sia aperto, e la successione $(A_n)_n$ risulti decrescente.

3. Per ogni n, $g_n(u) = g(u)$ qualora $u \notin A_n$.

4. Detta δ_n la massima ampiezza delle componenti connesse dell'aperto A_n, si abbia $\lim_n \delta_n = 0$.

In [5], l'Autore dimostra che una successione generatrice esiste sempre, e converge a g uniformemente. Fissata una tale successione generatrice, ovviamente esistono gli integrali di Stieltjes $F_n : [a, b] \to I\!R$, definiti da

$$F_n(x) = \int_a^x f dg_n,$$

per ogni $x \in [a, b]$ e $n \in I\!N$. Ovviamente, l'integrabilita' di f rispetto a g é legata alla convergenza di questi integrali, e all'indipendenza del limite dalla successione (g_n). Perché cio' accada, occorre un concetto di assoluta continuita'.

Definizione 2.2 Data una successione $(F_n)_n$ di funzioni continue su $[a, b]$, e una successione $(g_n)_n$ di funzioni di variazione limitata su $[a, b]$, diremo che le F_n sono *uniformemente assolutamente continue* rispetto alle g_n se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, ogniqualvolta $]u_i, v_i[_i$ sia una successione (finita) di intervalli a due a due disgiunti in $[a, b]$, tale che $\max_i(v_i - u_i) < \delta$, si abbia per ogni n l'implicazione

$$\sum_i |g_n(v_i) - g_n(u_i)| < \delta \Rightarrow \sum_i |F_n(v_i) - F_n(u_i)| < \varepsilon.$$

Ovviamente, questa definizione contempla anche il caso in cui le successioni (F_n) e (g_n) si riducano ad un solo elemento.

Nel seguente teorema, sono riportati a grandi linee i principali risultati di [5].

Teorema 2.3 *Se le funzioni integrali F_n sono uniformemente assolutamente continue rispetto alla successione (g_n), allora le F_n convergono uniformemente ad una funzione (continua) F, che é a sua volta assolutamente continua rispetto a g. Esiste inoltre una funzione f_0, (ottenuta da F con un processo di derivazione), integrabile rispetto a g secondo qualsiasi successione generatrice, che risulta quasi ovunque uguale a f.*

Tra i risultati piu' concreti, menzioniamo il teorema che fornisce una formula di calcolo.

Teorema 2.4 *Sia $u : I\!R \to I\!R$ una qualsiasi funzione misurabile, localmente limitata, e sia $g[a,b] \to I\!R$ una qualsiasi funzione continua (avente variazione illimitata su ogni sotto-intervallo). Allora la funzione $f : [a,b] \to I\!R$ definita da $f(x) = u(g(x))$ é integrabile rispetto a g, e risulta*

$$\int_a^x f(t)dg = \int_a^x u(g(t))dg = U(g(x)) - U(g(a))$$

per ogni $x \in [a,b]$, ove U é la funzione integrale (alla Lebesgue) di u.

Nei lavori [3, 4] sono riportate e generalizzate le costruzioni dovute al Caccioppoli, fornendo maggiori dettagli in alcuni casi, e chiarendo alcuni punti sui quali nel lavoro [5] si notavano imprecisioni; si sono date ulteriori classi di funzioni integrabili (oltre a quella stabilita nel Teorema 2.4), e si sono interpretati i risultati ottenuti in termini di integrazione stocastica (per mezzo della Formula di Ito).

Tuttavia non ci dilungheremo su questi aspetti, per ragioni di spazio. Passeremo invece a trattare il secondo approccio alla teoria dell'Integrazione Stocastica, anche qui limitando di molto le descrizioni e i collegamenti tra i vari concetti e risultati.

3 Integrale in Spazi di Riesz

Come gia' accennato in precedenza, l'approccio funzionale al problema dell'integrale stocastico consiste nel riguardare un processo stocastico $(X_t)_{t\in[a,b]}$ come un'applicazione

$$\mathbf{X} : [a,b] \to R,$$

dove R é un opportuno spazio funzionale. In queste note, ci limiteremo a trattare il caso (oggetto di piu' recenti indagini) in cui R sia uno spazio di Riesz. Piu' precisamente, si supporra' che R sia un'algebra completa di Riesz, secondo la seguente definizione.

Definizione 3.1 Uno spazio di Riesz R, Dedekind completo, viene detto *algebra di Riesz* se ivi é definita una seconda operazione binaria commutativa, denotata $\times$ e detta *prodotto*, che gode delle usuali proprieta' di compatibilita' con le altre operazioni dello spazio vettoriale R e con l'ordinamento ivi presente. In particolare, richiediamo che

$$\text{(a) } r_1 \times r_2 \leq (r_1 + h) \times r_2 \text{ se } h, r_2 \geq 0$$

$$\text{(b) } r_n \downarrow 0 \Rightarrow r_n \times r \downarrow 0 \ \forall\, r \geq 0$$

Su un tale spazio, si possono introdurre svariati tipi di convergenza, alcuni topologici, altri no. Per maggiore generalita', introdurremo qui una struttura di convergenza che prende il nome di $\mathcal{N}$-convergenza, e che é basata sull'introduzione di una famiglia $\mathcal{N}$ di successioni, opportunamente strutturata: tale famiglia costituisce l'ideale delle successioni convergenti a 0.

Definizione 3.2 Sia assegnata su R una famiglia $\mathcal{N}$ di successioni, che verifichi le seguenti condizioni:

0) $\mathcal{N}$ sia un ideale rispetto all'ordinamento di $R^{\mathbb{N}}$;

1) Ogni elemento di $\mathcal{N}$ sia una successione *limitata*;

2) $\mathcal{N}$ contenga tutte le successioni *definitivamente nulle*;

3) $\mathcal{N}$ contenga tutte le successioni della forma $(a_n) = (\frac{1}{n}u)$, per qualche $u \in R$.

Una tale famiglia $\mathcal{N}$ prende il nome di *ideale di convergenza.*

Assegnato su R un ideale di convergenza $\mathcal{N}$, si puo' introdurre un concetto di convergenza per successioni, come segue.

Definizione 3.3 Assegnata una successione a_n in R, diremo che essa é *$\mathcal{N}$-convergente* ad un elemento $a \in R$ se la successione $(a_n - a)_n$ fa parte di $\mathcal{N}$.

Si puo' facilmente dimostrare che questa definizione conduce ad un'operazione di limite che gode di tutte le proprieta' di linearita' e monotonia tipiche di questo algoritmo, in particolare si ha *unicita'* del limite e sussiste il *criterio di Cauchy*, opportunamente formulato. Chiaramente, rispetto a tale limite, $\mathcal{N}$ consiste delle successioni che convergono a 0.

D'ora in poi, supporremo sempre che R sia una fissata algebra di Riesz, munita di un ideale di convergenza $\mathcal{N}$.

Rispetto al fissato ideale $\mathcal{N}$ di convergenza, si puo' introdurre un concetto di *integrabilita'* per funzioni $q : \mathcal{I} \to R$, dove $\mathcal{I}$ denota l'insieme di tutti i sottointervalli di un fissato intervallo $[a, b]$ della retta reale. Come al solito, si introduce il concetto di *decomposizione* per $[a, b]$, mediante un insieme finito D di punti $\{t_0, t_1, ..., t_{2n}\}$, con $a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{2n} = b$. Per una tale decomposizione, si definisce *mesh* di D, e si denota con $\delta(D)$, il massimo delle ampiezze $t_i - t_{i-1}$, con $i = 1, ..., 2n$. L'insieme delle decomposizioni sara' usualmente denotato con $\mathcal{D}$.

Definizione 3.4 Data un'applicazione $q : \mathcal{I} \to R$, si ponga

$$S(q, D) = \sum_{i=1}^{2n} q([t_{i-1}, t_i]),$$

per qualsiasi decomposizione $D = \{t_0, t_1, ..., t_{2n}\}$.

Si noti che non escludiamo formalmente gli eventuali intervalli degeneri $[t,t]$, ma per essi assumeremo implicitamente $q([t,t]) = 0$.

Diremo che q é *integrabile* (rispetto all'ideale $\mathcal{N}$) se esiste un elemento J in R tale che $\mathcal{N}$ contenga la successione $(p_n)_n$ definita da

$$p_n = \sup\{|S(q,D) - J| : \delta(D) < \frac{1}{n}\}.$$

Se cio' accade, J é *unico*: esso viene detto *integrale* di q, e denotato con $\int_{[a,b]} q$.

L'integrale cosi' introdotto é lineare e monotono rispetto alle funzioni, e si comporta additivamente anche rispetto ai sottointervalli. Si ha infatti la seguente proposizione.

Proposizione 3.5 *Si fissino un intervallo reale $[a,b]$, una funzione $q : \mathcal{I} \to R$, e un sottointervallo $[u,v] \subset [a,b]$. Se $q : \mathcal{I} \to R$ é integrabile, risulta integrabile anche la funzione $q_{[u,v]}$ definita da*

$$q_{[u,v]}([\alpha,\beta]) = q([u,v] \cap [\alpha,\beta])$$

intendendo nullo il valore a secondo membro se l'intersezione risulta vuota o puntiforme. Si ha inoltre

$$\int_{[a,b]} q = \int_{[a,c]} q + \int_{[c,b]} q$$

per ciascun punto $c \in]a,b[$.

Cio' conduce al concetto di *funzione integrale* della q, qualora q sia integrabile in $[a,b]$, ponendo

$$J_q([c,d]) = \int_{[c,d]} q = \int_{[a,b]} q_{[c,d]},$$

per ogni $[c,d] \subset [a,b]$.

Evidentemente, la funzione J_q é additiva e ha integrale nullo, ma piu' significativo é il seguente risultato:

Teorema 3.6 *Se $q : \mathcal{I} \to R$ é integrabile, allora la funzione d'intervallo $|q - J_q|$ ha integrale nullo.*

Il significato del teorema 3.6 é che una funzione integrabile differisce da una funzione additiva solo per una funzione avente integrale nullo.

Vediamo ora come si definiscono l'integrale alla Ito e quello alla Riemann-Stieltjes: a tale scopo occorrono una funzione d'intervallo $q : \mathcal{I} \to R$ e una funzione *di punto* $f : [a,b] \to R$.

Definizione 3.7 Diremo che f é *integrabile alla Ito* rispetto a q se é integrabile la funzione d'intervallo $\phi : \mathcal{I} \to R$ definita da

$$\phi([u,v]) = f(u)q([u,v]),$$

per ogni intervallo $[u,v] \subset [0,1]$.

Per definire invece l'integrale alla Riemann-Stieltjes, occorre un tipo diverso di somma.

Definizione 3.8 Date una funzione $f : [a,b] \to R$ e un'applicazione $q : \mathcal{I} \to R$, diremo che f é *integrabile* alla Riemann-Stieltjes rispetto a q se esiste un elemento $Y \in R$ tale che appartenga a $\mathcal{N}$ la successione (p_h) definita da

$$p_h = \sup\{|S_{f,q}(D) - Y| : \delta(D) < \frac{1}{h}\},$$

ove

$$S_{f,q}(D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1})q([t_{2(i-1)}, t_{2i}]).$$

Se cio' accade, si scrivera'

$$Y = (RS) - \int_{[a,b]} f\ q.$$

Definizione 3.9 Date due funzioni $f, g : [a,b] \to R$, diremo che f é *integrabile* alla Riemann-Stieltjes (risp. alla Ito) rispetto a g se f é integrabile rispetto alla funzione $\Delta g : \mathcal{I} \to R$ definita da

$$\Delta g([u,v]) = g(v) - g(u),$$

per ogni $[u,v] \subset [a,b]$. In tal caso, si usera' la notazione

$$\int_{[a,b]} f \Delta g = (RS) - \int_a^b f dg, \quad (\text{ risp.} = (I) - \int_a^b f dg).$$

Una conseguenza del teorema 3.6 é la seguente.

Corollario 3.10 *Se $f : [a,b] \to R$ é limitata, e integrabile (RS) rispetto ad una funzione integrabile $q : \mathcal{I} \to R$, allora f é integrabile anche rispetto alla funzione integrale J_q, e risulta*

$$\int_a^b fq = \int_{[a,b]} f\ J_q.$$

Tra le varie proprieta' dell'integrale di Riemann-Stieltjes classico, una riguarda la possibilita' di scambiare il ruolo di f con quello di g: lo stesso accade nel nostro contesto.

Proposizione 3.11 *Date due funzioni $f, g : [a, b] \to R$, l'integrale di Riemann-Stieltjes $\int f dg$ esiste se e solo se esiste $\int g df$, e in tal caso si ha*

$$\int_a^b f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g df.$$

Un primo, prevedibile, teorema di esistenza per l'integrale di Riemann-Stieltjes $\int fq$ richiede la continuita' (uniforme) di f e la proprieta' di *variazione limitata* per q.

Definizioni 3.12 Data una funzione d'intervallo $q : \mathcal{I} \to R$, diciamo che q é *uniformemente continua* se appartiene a $\mathcal{N}$ la successione (p_n) definita da

$$p_n = \sup\{|q([u, v])| : v - u < \frac{1}{n}\}.$$

Diremo che q é *holderiana* di *ordine* α ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) se esiste una costante $H \in R$ tale da aversi

$$|q([u, v])| \leq H|u - v|^\alpha,$$

per ogni $[u, v] \subset [a, b]$.

Diremo che q é di *variazione limitata* se é limitato in R l'insieme $\{S_{|q|}(D) : D \in \mathcal{D}\}$.

Data una generica funzione $f : [a, b] \to R$, diremo che f é *uniformemente continua* (oppure holderiana, oppure di *variazione limitata*, se la funzione Δf gode della stessa proprieta'.

Enunceremo ora i principali teoremi di esistenza per l'integrale di Riemann-Stieltjes.

Teorema 3.13 *Se $f : [a, b] \to R$ é uniformemente continua, e $q : \mathcal{I} \to R$ é di variazione limitata, allora f é integrabile rispetto a q.*

Teorema 3.14 *Se $f : [a, b] \to R$ é holderiana di ordine α, e $q : \mathcal{I} \to R$ é una funzione additiva, holderiana di ordine β, e se $\alpha + \beta > 1$, allora esiste $\int f\ q$.*

Teorema 3.15 *Sia $q : \mathcal{I} \to R$ una funzione integrabile (non necessariamente additiva) e supponiamo che la sua funzione integrale J_q sia holderiana di ordine β. Se $f : [a, b] \to R$ é holderiana di ordine α, e se $\alpha + \beta > 1$, allora f é integrabile rispetto a q.*

4 Integrale Stocastico e Formula di Ito

Presentiamo qui alcuni risultati, in forma volutamente non del tutto generale, che possono essere dedotti da [1], e che generalizzano l'integrale stocastico e le formule di Ito corrispondenti.

Definizione 4.1 Sia $f : R \to R$ una funzione arbitraria. Diremo che essa soddisfa alla *formula di Taylor* di ordine 1 se esiste una funzione $f' : R \to R$, tale da aversi, per ogni x e k in R:

$$f(x+k) - f(x) = kf'(x) + |k|B_1(x,k)$$

ove B_1 sia una opportuna funzione, limitata su insiemi limitati.

Diremo poi che f soddisfa alla *formula di Taylor* di ordine 2 se f soddisfa alla formula di ordine 1 e se esiste inoltre una funzione $f'' : R \to R$ tale che risulti

$$f(x+k) - f(x) = kf'(x) + \frac{1}{2}k^2 f''(x) + |k|^2 B_2(x,k)$$

ove B_2 sia una opportuna funzione, limitata su insiemi limitati.

Analogamente si introduce il concetto di *formula di Taylor* di ordine 3, etc.

I concetti ora introdotti consentono di dimostrare la cosiddetta *formula di Ito*, che fornisce uno strumento per il calcolo dell'integrale di Ito, nelle situazioni che ora descriveremo.

Supponiamo che siano assegnate due funzioni, f, g a valori in R, la prima definita su R e la seconda su $[0,1]$: quello che si vuole ottenere é l'esistenza dell'integrale

$$(I)\int_0^1 f(g(t))dg(t)$$

(sotto opportune ipotesi), e la sua rappresentabilita' tramite un'opportuna formula (formula di Ito).

Teorema 4.2 *Supponiamo assegnata una funzione, $F : R \to R$ verificante la formula di Taylor di ordine 3, e sia poi $g : [0,1] \to R$ una funzione Holderiana di ordine $\beta > \frac{1}{3}$, e tale che la funzione d'intervallo $q(I) = (\Delta(g)(I))^2$ sia integrabile. Allora esiste l'integrale di Ito $(I)\int_0^1 F'(g(t))dg(t)$ e si ha (formula di Ito)*

$$\int_0^1 F'(g(t))dg(t) = F(g(1)) - F(g(0)) - \frac{1}{2}\int_0^1 F''(g(t))dq.$$

Il teorema precedente, oltre a fornire condizioni di integrabilita' e una formula per il calcolo dell'integrale, permette anche di individuare una classe di funzioni g, dette *integratori* rispetto alle quali l'integrale di Ito fornisce in maniera del tutto naturale un nuovo integratore, per cui sussiste una regola di differenziazione del tutto analoga alla classica regola della catena.

Definizione 4.3 Diremo che una funzione $g : [0,1] \to R$ é un *integratore* se le seguenti condizioni sono verificate:
i) g sia Holderiana di ordine $\beta > \frac{1}{3}$;
ii) la funzione d'intervallo $q(I) = (\Delta(g)(I))^2$ sia integrabile;
iii) la funzione integrale $I \to \int_I (\Delta(g)(I))^2$ sia Holderiana di ordine $\beta > \frac{1}{3}$.

Per gli integratori sussiste infatti il seguente risultato.

Teorema 4.4 *Supponiamo che $F : R \to R$ soddisfi alla formula di Taylor di ordine 3, e $g : [0,1] \to R$ sia un integratore. Allora la funzione integrale*

$$Y(t) = (I)\int_0^t F'(g(s))dg(s)$$

é a sua volta un integratore.

La regola della catena, che stabiliremo di seguito, permette ora di integrare funzioni (sufficientemente regolari) rispetto al nuovo integratore Y.

Teorema 4.5 *Nella situazione e con le notazioni del teorema 4.4, per ogni funzione $H : R \to R$ che soddisfi alla formula di Taylor di ordine 3, esiste l'integrale di Ito $\int H'(Y(t))dY(t)$ e si ha*

$$\int_0^1 H'(Y(t))dY(t) = H(Y(1)) - H(Y(0)) - \frac{1}{2}\int_0^1 H''(Y(t))F'(t)^2 dq$$

ove al solito q denota la funzione d'intervallo $q(I) = (\Delta(g)(I))^2$.

Riferimenti bibliografici

[1] A.BOCCUTO, D.CANDELORO, E.KUBINSKA: *Kondurar theorem and Ito formula in Riesz spaces;* J.Concr.Appl.Math. **4** (2006), pp. 67-90

[2] A.BOCCUTO, D.CANDELORO: *Ito formula in Riesz spaces;* Proc. X IPMU Congress, Perugia, Univ. La Sapienza Ed. (2004), pp. 1807-1814.

[3] J.K.BROOKS, D.CANDELORO: *Integration with respect to functions of unbounded variation;*Proc. VII Functional Analysis Conference, Dubrovnik 2001; Ed. Bakic et al., Various Publ. Series **46**, Aarhus C (2002), pp. 63-81.

[4] J.K.BROOKS, D.CANDELORO: *On the Caccioppoli Integral;*Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **51** (2003), pp. 415-431.

[5] R.CACCIOPPOLI: *L'integrazione e la ricerca di primitive rispetto ad una funzione continua qualunque;*Ann.Mat.Pura e Appl. **40** (1955), pp.15-34.

[6] FOLLMER: *Calcul d'Ito sans probabilité;...*

[7] W.-C. KUO, C.C.A. LABUSCHAGNE, B.A. WATSON: *Conditional Expectation on Riesz Spaces;* J.M.A.A. **303** (2005), pp. 509-521.

[8] W.-C. KUO, C.C.A. LABUSCHAGNE, B.A. WATSON:*Zero-one laws for Riesz spaces and fuzzy random variables;*Proc. IFSA Congress, Beijing (2005), to appear.

[9] W.-C. KUO, C.C.A. LABUSCHAGNE, B.A. WATSON:*Ergodic theory and the Strong Law of Large Numbers on Riesz Spaces;*JMAA, to appear.

[10] M.SION: *A theory of semigroup-valued measures;* Springer, LN 355 (1973).