

Uniforme esaustivá e assoluta continuitá

DOMENICO CANDELORO

Boll.Un.Mat.Ital. **4-B**,1985,pp.709-724

SUMMARY. We study some properties of uniformly exhaustive families of group valued finitely additive set functions. The principal results here obtained consist in a uniform approximation theorem and some descriptions of Lebesgue-type decompositions.

1 Introduzione

Il ruolo della cosiddetta "esaustivá" (s-boundedness) é fondamentale in Teoria della Misura: basti consultare [8] per una ricca esposizione dei risultati derivanti da tale proprietá, in relazione a misure classiche e misure finitamente additive (masse) a valori in spazi di Banach. Molti di questi risultati si estendono anche al caso di masse e misure a valori in gruppi topologici (ad es., si veda [9, 10, 14]), e nello stesso contesto si colloca anche questo lavoro, ove si adopera in maniera determinante il concetto di "uniforme esaustivá" per una famiglia di masse.

In proposito, vale la pena di osservare che la proprietá in questione fu introdotta da R.Caccioppoli in [3], sia pure con altra denominazione, e ritrovata in seguito da Dubrovskii, [11] e [12], il quale usa una definizione formalmente piú debole, e la locuzione "uniforme additivá". Ma l'Autore che fece piena luce sulle notevoli potenzialitá di questo concetto fu F.Cafero, che in diversi lavori (v. [4, 5, 6, 7]) dimostró l'equivalenza delle formulazioni date da Caccioppoli e da Dubrovskii, ne introdusse altre, ancora equivalenti ma molto piú maneggevoli (e assai vicine a quella universalmente adottata oggi) e le utilizzó vantaggiosamente per indagini sull'uniforme assoluta continuitá, sul teorema di Vitali-Hahn-Saks, su criteri di compattezza debole alla Dunford-Pettis, etc.

Problemi del genere sono alla base di questa nota, benché qui si abbandoni l'additivá numerabile, e ci si ricollegli a piú recenti lavori di Brooks ([1, 2]), Klimkin ([13]), Traynor ([16]) etc.

Dopo un paragrafo di preliminari, al n.3 ci occupiamo di alcune conseguenze di un teorema di Traynor sull'esistenza di decomposizioni alla Lebesgue per masse esaustive; al n.4 affrontiamo il problema di estendere, ove possibile, per masse definite su un'algebra \mathcal{A} , a misure definite sulla σ -algebra generata da \mathcal{A} : sfruttando un teorema di Sion, si prova che una famiglia di masse numerabilmente additive e uniformemente esaustive ammette una famiglia di corrispondenti misure

estensioni, che risultano uniformemente approssimabili tramite le masse originarie; il paragrafo si conclude con una dimostrazione diretta di tale risultato, nel caso di masse scalari non negative, e con un'applicazione che fornisce una parziale estensione di un recente teorema di Klimkin.

Ringrazio sentitamente i Proff. C.Vinti e G.Letta per avermi costantemente seguito e consigliato nell'elaborazione di questa nota: al Prof. Letta, in particolare, sono grato per le segnalazioni relative alle opere di R.Caccioppoli e F.Cafiero, nonché per i suoi preziosi suggerimenti in varie fasi di questo lavoro.

2 Preliminari

Denoteremo con Γ un gruppo abeliano topologico, separato e completo, del quale denoteremo con 0 l'elemento neutro. Con $\mathcal{I}(0)$ indicheremo una base d'intorni di 0 , che supporremo chiusi e simmetrici. Se $(B_n)_n$ è una successione di parti di Γ , la scrittura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$$

sarà un modo abbreviato per intendere che, per ogni $U \in \mathcal{I}(0)$, si ha definitivamente $B_n \subset U$.

In tutto il seguito, indicheremo con Ω un insieme astratto non vuoto, e con \mathcal{A} una fissata algebra di sottoinsiemi di Ω . Denoteremo quindi con \mathcal{A}_σ la classe delle unioni numerabili di elementi di \mathcal{A} , e con $\tau(\mathcal{A})$ la σ -algebra (tribù) generata da \mathcal{A} .

Definizione 2.1 Una *massa* (a valori in Γ) è una funzione d'insieme, finitamente additiva, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$. (Per tali funzioni, si ha automaticamente $\mu(\emptyset) = 0$).

Se $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ è una massa, per ogni elemento $A \in \mathcal{A}$ porremo

$$\mu^+(A) = \{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\}.$$

Qualora sia $\mathcal{A} = \tau(\mathcal{A})$, e μ sia numerabilmente additiva, diremo che μ è una *misura*.

Definizione 2.2 Una massa $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ è detta *esaustiva*, se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$$

ogniqualevolta $(A_n)_n$ sia una successione di elementi di \mathcal{A} , a due a due disgiunti.

È facile verificare che, nella definizione di massa esaustiva, la condizione di limite nullo può essere equivalentemente sostituita con la seguente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^+(A_n) = 0.$$

Osserviamo anche che ogni misura è automaticamente esaustiva, nella σ -algebra ove è definita; lo stesso vale anche per le masse a valori reali non negativi, ma non in generale per masse reali di segno qualsiasi.

La seguente proposizione esprime alcune importanti proprietà derivanti dall'eshaustività. Benché essa sia pressoché nota, ne riportiamo una dimostrazione, sia per completezza, sia come riferimento per il seguito.

Proposizione 2.3 *Sia $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ una massa. Le condizioni che seguono sono equivalenti.*

a) μ é esaustiva;

b) per ogni successione monotona (A_n) di elementi di \mathcal{A} , si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{q > p > n} \mu^+(A_p \triangle A_q) = 0.$$

Dimostrazione. L'implicazione (b) \Rightarrow (a) é elementare, per cui proveremo solo l'altra. Supponiamo dunque che μ sia esaustiva, e che $(A_n)_n$ sia una successione decrescente in \mathcal{A} . Procedendo per assurdo, ammettiamo che esistano un intorno $U \in \mathcal{I}(0)$ e una successione di coppie $(n_k, p_k)_k$ di numeri interi positivi, con $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$, e con

$$\mu^+(A_{n_k} \setminus A_{n_k+p_k}) \not\subset U,$$

per ogni k .

Poniamo $B_k = A_{n_k} \setminus A_{n_k+p_k}$, per $k \in \mathbb{N}$. Senza perdita di generalità, gli interi n_k si possono scegliere in modo che sia $n_{k+1} > n_k + p_k$ per ogni k , così che gli insiemi B_k risultino a due a due disgiunti. Ora, non potendo essere $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^+(B_k) = 0$, μ non sarebbe esaustiva, e ciò é assurdo. In maniera analoga si può procedere nel caso di una successione crescente, e quindi la proposizione é provata. ■

Definizione 2.4 Sia $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ una massa. Diremo che μ é una *pre-misura* se essa é la restrizione ad \mathcal{A} di una misura su $\tau(\mathcal{A})$. Tale misura, quando esiste, é unica (il che si prova facilmente) e qui verrà generalmente denotata con $\tilde{\mu}$.

D'ora in poi, indicheremo con Γ_1, Γ_2 due gruppi abeliani topologici, separati e completi, e indicheremo con 0_1 e 0_2 i rispettivi elementi neutri. Su una medesima algebra \mathcal{A} siano λ, μ due masse, la prima a valori in Γ_1 , la seconda a valori in Γ_2 .

Definizione 2.5 Diremo che μ é assolutamente continua rispetto a λ , e scriveremo $\mu \ll \lambda$, se per ogni intorno U in $\mathcal{I}(0_2)$ esiste un intorno V in $\mathcal{I}(0_1)$ in modo che per ogni $A \in \mathcal{A}$ valga l'implicazione

$$\lambda^+(A) \subset V \Rightarrow \mu^+(A) \subset U.$$

Diremo invece che μ é singolare rispetto a λ (o anche che λ é singolare rispetto a μ , o ancora che λ e μ sono mutuamente singolari) se per ogni intorno $U \in \mathcal{I}(0_2)$ e per ogni intorno $V \in \mathcal{I}(0_1)$ esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$ tale da aversi

$$\lambda^+(A) \subset V \text{ e } \mu^+(A^c) \subset U.$$

Scriviamo allora $\mu \perp \lambda$.

Qualora sia $\Gamma_1 = \mathbb{R}$, e λ sia non negativa, si dice che λ é una massa di controllo per μ se risulta $\lambda \ll \mu$ e anche $\mu \ll \lambda$.

Sussiste il seguente risultato di [1].

Teorema 2.6 Se Γ é uno spazio di Banach, con norma $\| \cdot \|$, e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ é una massa esaustiva, allora esiste per μ una massa di controllo λ , tale che si abbia, per ogni $A \in \mathcal{A}$,

$$\lambda(A) \leq \sup\{\| \mu(B) \| : B \subset A, B \in \mathcal{A}\}.$$

3 Decomposizioni.

Studieremo qui alcune conseguenze dell'esaustivit , e in particolare dell'uniforme esaustivit  per le famiglie di masse, in termini di decomposizioni alla Lebesgue. Premettiamo un importante risultato, dovuto a Traynor, [16].

Teorema 3.1 Siano λ, μ due masse, definite su una medesima algebra \mathcal{A} , la prima a valori in Γ_1 , la seconda in Γ_2 . Se μ é esaustiva, allora esistono, e sono uniche, due masse, μ^a e μ^s , definite su \mathcal{A} e a valori in Γ_2 , dotate delle propriet  seguenti:

i) $\mu^a \ll \mu; \mu^s \ll \mu$.

ii) $\mu^a \ll \lambda; \mu^s \perp \lambda$.

iii) $\mu^a + \mu^s = \mu$.

Inoltre, la propriet  (i) puo' essere formulata in termini piu' stringenti, in quanto risulta

iv) per ogni $U \in \mathcal{I}(0_2)$ e per ogni $A \in \mathcal{A}$ valgono le implicazioni

$$\mu^+(A) \subset U \Rightarrow \mu^{a+}(A) \cup \mu^{s+}(A) \subset U.$$

Definizione 3.2 Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse, definite su di una stessa algebra \mathcal{A} e a valori nello stesso gruppo Γ . Considerato il gruppo H , ottenuto assegnando al gruppo Γ^I la topologia della convergenza uniforme, chiameremo *massa globale* per la famiglia $\{\mu_i\}_{i \in I}$, e la denoteremo con $[\mu_i]_{i \in I}$, la massa $\mu : \mathcal{A} \rightarrow H$, definita da

$$\mu(A) = (\mu_i(A))_{i \in I}.$$

Per ciascun indice i , μ_i sara' detta la *i-esima componente* di μ .

Definizione 3.3 Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse come sopra. Diremo che le μ_i sono *uniformemente esaustive* (o che la famiglia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ é *uniformemente esaustiva*), e abbrevieremo scrivendo "u.e.", se é esaustiva la massa globale

$[\mu_i]_{i \in I}$. In termini espliciti (e alla luce di 2.3) cio' significa che, per ogni successione monotona $(A_n)_n$ in \mathcal{A} risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i \in I} \bigcup_{p > q > n} \mu_i^+(A_p \Delta A_q) = 0.$$

Nel caso particolare in cui $\{\mu_i\}_{i \in I}$ sia una famiglia di misure su una tribu' \mathcal{T} , l'uniforme esaustivita' puo' essere enunciata in modo piu' incisivo, come segue.

Teorema 3.4 *Affinche' una famiglia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ di misure, su una σ -algebra \mathcal{T} e a valori in Γ , sia uniformemente esaustiva, occorre e basta che, per ogni successione monotona $(A_n)_n$ in \mathcal{T} , posto $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, si abbia*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i \in I} \mu_i^+(A_n \Delta A) = 0.$$

Dimostrazione. E' un'elementare conseguenza di 2.3. ■

Definizioni 3.5 Supponiamo che $\{\mu_i\}_{i \in I}$ sia una famiglia di masse, definite su una medesima algebra \mathcal{A} , a valori in Γ_2 , e che $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ sia una famiglia di masse, definite su \mathcal{A} e a valori in Γ_1 . Denotiamo con H_1 e H_2 rispettivamente i gruppi topologici ottenuti munendo Γ_1^I e Γ_2^I della topologia della convergenza uniforme, e siano $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow H_1$ e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow H_2$, rispettivamente, le masse globali di $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ e di $\{\mu_i\}_{i \in I}$. Diremo che le masse μ_i sono *assolutamente continue in modo uniforme* rispetto alle masse λ_i , e scriveremo $\mu_i \ll_u \lambda_i$, se risulta $\mu \ll \lambda$.

Diremo invece che le μ_i sono *singolari in modo uniforme* rispetto alle masse λ_i , e scriveremo $\mu_i \perp_u \lambda_i$, se risulta $\mu \perp \lambda$.

In termini espliciti, si ha $\mu_i \ll_u \lambda_i$ se, per ogni intorno U in $\mathcal{I}(0_2)$ esiste un intorno V in $\mathcal{I}(0_1)$ tale che, per ogni $A \in \mathcal{A}$ valga l'implicazione

$$\bigcup_{i \in I} \lambda_i^+(A) \subset V \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \mu_i^+(A) \subset U.$$

(Osserviamo che, anche se risulta $\mu_i \ll_u \lambda_i$, non é vero in generale che sia $\mu_i \ll \lambda_i$ per ogni i).

Si avra' invece $\mu_i \perp_u \lambda_i$ se, per ogni intorno $U \in \mathcal{I}(0_2)$ e per ogni intorno $V \in \mathcal{I}(0_1)$, esiste un insieme $E \in \mathcal{A}$ tale che si abbia

$$\bigcup_{i \in I} \lambda_i^+(E) \subset V, \quad \text{e} \quad \bigcup_{i \in I} \mu_i^+(E^c) \subset U.$$

Applicando il teorema 3.1 alle masse globali, si ottiene immediatamente il seguente risultato.

Teorema 3.6 *Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse u.e., definite su una stessa algebra \mathcal{A} e a valori in uno stesso gruppo Γ_2 ; sia poi $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse, definite su \mathcal{A} e a valori in un gruppo Γ_1 . Esistono allora, e sono uniche,*

due famiglie di masse, $\{\beta_i\}_{i \in I}$ e $\{\tau_i\}_{i \in I}$, definite in \mathcal{A} e a valori in Γ_2 , tali che si abbia

- (i) $\beta_i \ll_u \mu_i$, $\tau_i \ll_u \mu_i$;
- (ii) $\beta_i \ll_u \lambda_i$, $\tau_i \perp_u \lambda_i$;
- (iii) $\beta_i + \tau_i = \mu_i$, per ogni $i \in I$.

In generale, tuttavia, le masse β_i e τ_i , di cui al teorema 3.6, non coincidono con quelle che si ottengono decomponendo alla Lebesgue, in accordo con il teorema 3.1, ciascuna massa μ_i rispetto alla corrispondente λ_i . Ad esempio, se $I = \{1, 2\}$, $\mu_1 = \lambda_2, \mu_2 = \lambda_1$, e $\mu_1 \perp \mu_2$, é chiaro che la decomposizione di Lebesgue di μ_1 rispetto a λ_1 é data dalle masse 0 e μ_1 (nell'ordine), e quella di μ_2 rispetto a λ_2 é data dalle masse 0 e μ_2 (nell'ordine); tuttavia, é $\mu_i \ll \lambda_i$, e quindi si ha $\beta_1 = \mu_1, \beta_2 = \mu_2$, mentre é $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

Condizioni necessarie e sufficienti, affinché questo inconveniente non si verifichi, sono fornite nel seguente teorema.

Teorema 3.7 *Su una stessa algebra \mathcal{A} siano assegnate due famiglie di masse, $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, $\{\mu_i\}_{i \in I}$, le prime a valori in Γ_1 , le seconde a valori in Γ_2 , e si denotino con λ , μ le corrispondenti masse globali:*

$$\lambda = [\lambda_i]_{i \in I}, \quad \mu = [\mu_i]_{i \in I}.$$

Per ogni indice i , si supponga che μ_i ammetta una decomposizione di Lebesgue rispetto a λ_i : e sia

$$\mu_i = \alpha_i + \sigma_i \quad (\text{con } \alpha_i \ll \lambda_i, \sigma_i \perp \lambda_i)$$

una siffatta decomposizione. Si supponga inoltre che μ ammetta una decomposizione di Lebesgue rispetto a λ : e sia

$$\mu = \beta + \tau \quad (\text{con } \beta \ll \lambda, \tau \perp \lambda)$$

una siffatta decomposizione, e poniamo $\beta = [\beta_i]_{i \in I}$, $\tau = [\tau_i]_{i \in I}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- a) $\alpha_i = \beta_i$ e $\sigma_i = \tau_i$ per ogni $i \in I$;
- b) $\beta_i \ll \lambda_i$ per ogni $i \in I$;
- c) $\beta_i \perp \sigma_i$ per ogni $i \in I$.

Dimostrazione. E' ovvio che (a) implica (b), ed é immediato verificare che (b) implica (c). Bastera' dunque provare che (c) implica (a). Supponiamo dunque che la condizione (c) sia soddisfatta, e proviamo che, per ogni indice i , é nulla la differenza

$$\delta_i = \beta_i - \alpha_i = \sigma_i - \tau_i.$$

A questo scopo, fissiamo un indice $i \in I$ e un intorno U in $\mathcal{I}(0_2)$. Essendo $\alpha_i \ll \lambda_i$, esiste un intorno $V \in \mathcal{I}(0_1)$ tale che, per ogni elemento A di \mathcal{A} , valga l'implicazione

$$\lambda_i^+(A) \subset V \Rightarrow \alpha_i^+(A) \subset U.$$

Essendo poi $\beta \ll \lambda$, esiste un intorno W in $\mathcal{I}(0_1)$ tale che, per ogni A in \mathcal{A} valga l'implicazione

$$\bigcup_{j \in I} \lambda_j^+(A) \subset W \Rightarrow \bigcup_{j \in I} \beta_j^+(A) \subset U.$$

Essendo infine $\sigma_i \perp \lambda_i$, $\sigma_i \perp \beta_i$, $\tau \perp \lambda$, esistono in \mathcal{A} insiemi E, H, F tali da aversi

$$\lambda_i^+(E) \subset V \cap W, \sigma_i^+(E^c) \subset U; \sigma_i^+(H^c) \subset U, \beta_i^+(H) \subset U;$$

$$\bigcup_{j \in I} \lambda_j^+(F) \subset V \cap W, \bigcup_{j \in I} \tau_j^+(F^c) \subset U.$$

Poniamo $E \cap H = B$. Allora é $\alpha_i^+(B) \subset U$, $\beta_i^+(B) \subset U$, $\sigma_i^+(B^c) \subset U + U$. Inoltre, é $\alpha_i^+(F) \subset U$, $\beta_i^+(F) \subset U$, e $\tau_i^+(F^c) \subset U$. Ne segue

$$\begin{aligned} \delta_i^+(\Omega) &\subset \delta_i^+(B) + \delta_i^+(F) + \delta_i^+(B^c \cap F^c) \subset \\ &\subset \alpha_i^+(B) + \beta_i^+(B) + \alpha_i^+(F) + \beta_i^+(F) + \sigma_i^+(B^c) + \tau_i^+(F^c) \subset \\ &\subset U + U + U + U + (U + U) + U. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarieta' di U , cio' comporta che $\delta_i^+(\Omega)$ é ridotto al solo zero di Γ_2 , e quindi δ_i é nulla. ■

Osserviamo che, nel caso in cui le masse λ_i siano tutte coincidenti, la condizione (b) di 3.7 é automaticamente verificata, e quindi in tal caso sono verificate anche la (a) e la (c).

In particolare, se I é costituito da un solo elemento, il teorema 3.7 fornisce una dimostrazione dell'unicita' delle decomposizioni di Lebesgue, qualora ve ne siano. I seguenti corollari sono immediati.

Corollario 3.8 *Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse u.e., definite sulla stessa algebra \mathcal{A} e a valori in Γ_2 . Sia poi $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma_1$ una massa tale che $\mu_i \ll \lambda$ per ogni $i \in I$. Allora si ha*

$$\mu_i \ll_u \lambda.$$

(Il corollario 3.8 é un'estensione del teorema 1, par. 3, di [2]).

Sussiste ovviamente anche l'analogo risultato, relativo all'uniforme singolarita'.

Corollario 3.9 *Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ come in 3.8, e sia $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma_1$ una massa tale che $\mu_i \perp \lambda$ per ogni $i \in I$. Allora si ha*

$$\mu_i \perp_u \lambda.$$

Il prossimo corollario, generalizzando 3.8, permette di applicare efficacemente il teorema 2.6 al caso di famiglie di masse.

Corollario 3.10 *Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ come in 3.8, e sia $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse, definite su \mathcal{A} e a valori in Γ_1 . Se risulta $\mu_i \ll \lambda_i$ per ogni i , allora é anche $\mu_i \ll_u \lambda_i$.*

Corollario 3.11 *Siano μ_i , $i \in I$, masse u.e., a valori in uno spazio di Banach X . Allora esiste una famiglia di masse scalari $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ non negative, uniformemente esaustive e tali da aversi*

$$\lambda_i \ll \mu_i \ll \lambda_i \text{ per ogni } i \in I, \text{ e } \lambda_i \ll_u \mu_i, \mu_i \ll_u \lambda_i.$$

Dimostrazione. Siano λ_i le masse di controllo, di cui al teorema 2.6. La proprieta' di uniforme esaustivita' discende dall'ultima affermazione di tale teorema, e dal fatto che le μ_i sono u.e.. Dal corollario 3.10 seguono infine le relazioni

$$\lambda_i \ll_u \mu_i, \text{ e } \mu_i \ll_u \lambda_i.$$

■

4 Uniforme approssimabilita'

E' noto che, se $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ e' una pre-misura, allora \mathcal{A} e' densa in $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ nella topologia indotta da $\tilde{\mu}$; in altre parole, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $B \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che risulti

$$\tilde{\mu}(B \Delta A) < \varepsilon.$$

Questo fatto si trasporta al caso di masse a valori in un gruppo topologico, come segue.

Teorema 4.1 (Sion, [14]). *Sia $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ una massa numerabilmente additiva. Le condizioni che seguono sono equivalenti:*

- a) μ e' una pre-misura;
- b) per ogni successione monotona $(A_n)_n$ di elementi di \mathcal{A} , esiste in Γ il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

In virtu' di 2.3, e' chiaro che la condizione (b) di 4.1 puo' essere sostituita con l'esaustivita' di μ . Il seguente teorema, deducibile da [15], fornisce un'interessante descrizione della misura estensione della μ , qualora questa sia esaustiva e numerabilmente additiva.

Teorema 4.2 (Sion, [15]). *Sia $\mu : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma$ una misura. Allora:*

- a) per ogni elemento B di \mathcal{A}_σ si ha $\mu(B) = \lim_{A \subset B, A \in \mathcal{A}} \mu(A)$ (dove il limite e' inteso rispetto al semiordinamento, filtrante a destra, definito dall'inclusione);
- b) per ogni elemento C di $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ si ha $\mu(C) = \lim_{C \subset B, B \in \mathcal{A}_\sigma} \mu(B)$ (dove il limite e' inteso rispetto al semiordinamento, filtrante a sinistra, definito dall'inclusione);
- c) per ogni elemento C di $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ e per ogni intorno U di 0, esiste un elemento A di \mathcal{A} tale che

$$\mu^+(A \Delta C) \subset U.$$

La proprieta' (c) che figura nel teorema 4.2 puo' essere formalizzata come segue.

Definizione 4.3 Data una massa $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$, una parte \mathcal{B} di \mathcal{A} si dira' una *classe approssimante* per μ se, per ogni $U \in \mathcal{I}(0)$ e per ogni $A \in \mathcal{A}$, esiste un insieme $B \in \mathcal{B}$ per cui si abbia

$$\mu^+(B\Delta A) \subset U.$$

Così, se $\mu : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma$ è una misura, \mathcal{A} è una classe approssimante per μ .

Data poi una famiglia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ di masse, definite sulla stessa algebra \mathcal{A} e a valori in Γ , una parte \mathcal{B} di \mathcal{A} si dira' una classe *uniformemente approssimante* per la famiglia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ se essa è una classe approssimante per la massa globale $[\mu_i]_{i \in I}$. In tal caso, diremo anche che $\{\mu_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di masse *uniformemente \mathcal{B} -approssimabile*.

Applicando i teoremi 4.1 e 4.2 al caso di una famiglia di masse, si deducono facilmente i seguenti risultati.

Teorema 4.4 Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse, definite sulla stessa algebra \mathcal{A} e a valori in Γ . Affinché la massa globale $\mu = [\mu_i]_{i \in I}$ a valori in Γ^I sia una pre-misura, occorre e basta che le masse μ_i siano pre-misure uniformemente esaustive. In tal caso, risulta

$$\tilde{\mu} = [\tilde{\mu}_i]_{i \in I},$$

sicché le misure $\tilde{\mu}_i$ sono anch'esse uniformemente esaustive.

Dimostrazione. L'unica cosa da provare è che μ è numerabilmente additiva. A tale scopo, sia $(A_n)_n$ una successione decrescente di elementi di \mathcal{A} , avente intersezione vuota. Per 2.3, esiste in H il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Questo limite non può che essere l'elemento nullo, essendo, per ogni $i \in I$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i(A_n) = 0$. Pertanto, si può applicare a μ il teorema 4.1, e dedurne l'asserto. ■

Teorema 4.5 Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di pre-misure uniformemente esaustive, definite nell'algebra \mathcal{A} e a valori in Γ . Allora \mathcal{A} è una classe uniformemente approssimante per la famiglia di misure $\{\tilde{\mu}_i\}_{i \in I}$, definite su $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Dimostrazione. È immediata conseguenza dei teoremi precedenti. ■

Nel caso di masse scalari non negative, il teorema 4.5 può essere dimostrato direttamente, cioè senza far ricorso ai risultati di Sion, e pertanto in maniera più significativa. A tal fine, si osservi che la proposizione 2.3 si trasporta anche al caso di una famiglia di masse u.e., senza rilevanti modifiche nella dimostrazione, ottenendo la validità dell'asserto in senso uniforme. A questo punto, l'uniforme approssimabilità si può provare attraverso le seguenti proposizioni, di cui daremo dimostrazioni succinte.

Proposizione 4.6 Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse, definite su \mathcal{A} e a valori in \mathbb{R}_0^+ . Supponiamo che le μ_i siano numerabilmente additive e u.e.. Allora, per ogni successione monotona $(D_n)_n$ in \mathcal{A}_σ , esiste, uniformemente rispetto a i , il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{\mu}_i(D_n).$$

Dimostrazione. Tratteremo solo il caso di una successione decrescente, in quanto l'altro é piu' semplice, e per di piu' non verra' utilizzato. Sia dunque $(D_n)_n$ una successione decrescente di elementi di \mathcal{A}_σ ; per ogni $\varepsilon > 0$ esistera' una successione decrescente $(A_n)_n$ di elementi di \mathcal{A} , tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i \in I$, si abbia

$$A_n \subset D_n \text{ e } \widetilde{\mu}_i(D_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poiché $(A_n)_n$ é decrescente, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, per ogni $p \in \mathbb{N}$ e per ogni $i \in I$, risulti

$$\mu_i(A_n) - \mu_i(A_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi, per ogni $n > \bar{n}$, per ogni $p \in \mathbb{N}$ e $i \in I$, si ha

$$\widetilde{\mu}_i(D_n) - \widetilde{\mu}_i(D_{n+p}) \leq \widetilde{\mu}_i(D_n) - \mu_i(A_n) + \mu_i(A_n) - \mu_i(A_{n+p}) < \varepsilon,$$

e cio' prova l'asserto. ■

Proposizione 4.7 Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ come in 4.6. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni elemento B di $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ esiste un elemento A di \mathcal{A} tale da aversi

$$\widetilde{\mu}_i(A \Delta B) < \varepsilon,$$

per ogni $i \in I$.

Dimostrazione. Sia $B \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, e sia \mathcal{F} una sottoalgebra numerabile di \mathcal{A} , tale che $B \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$: poniamo $\mathcal{F} = \{F_k : k \in \mathbb{N}\}$. Per provare l'asserto, bastera' evidentemente far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k \in \mathbb{N}$ in modo che si abbia

$$\widetilde{\mu}_i(F_k \Delta B) < \varepsilon,$$

per ogni $i \in I$. Se cio' non fosse, troveremmo una successione $(i_k)_k$ in I e un $\varepsilon > 0$ tali che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulti $\widetilde{\mu}_{i_k}(F_k \Delta B) \geq \varepsilon$.

Sia ora $\lambda : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ una misura tale che $\widetilde{\mu}_{i_k} \ll \lambda$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e l'uniforme esaustivita' comporta che l'assoluta continuita' é uniforme rispetto a k . Poiché $B \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$, esiste una successione decrescente $(D_m)_m$ in \mathcal{F}_σ , tale da aversi $\lambda(B \setminus D_m) = 0$ per ogni m , e $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(D_m \setminus B) = 0$. Dunque si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{\mu}_{i_k}(D_m \Delta B) = 0$$

uniformemente in k , ma cio' contrasta con la condizione $\widetilde{\mu}_{i_k}(F_k \Delta B) \geq \varepsilon$, supposta vera per ogni k . La contraddizione prova l'asserto. ■

La proposizione 4.7 contempla anche il caso di pre-misure a valori in spazi di Banach: bastera' infatti applicare tale risultato alle misure di controllo, sfruttando il corollario 3.11.

Tramite i teoremi 4.4 e 4.5, si possono ottenere risultati come quelli di 3.10 e 3.9 dimostrando direttamente solo gli analoghi teoremi relativi a misure su σ -algebre, grazie al teorema d'isomorfismo di Stone (forma topologica).

Definizioni 4.8 Siano $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, $\{\mu_i\}_{i \in I}$ due famiglie di masse, con lo stesso insieme di indici, definite sulla medesima algebra \mathcal{A} , e a valori la prima in Γ_1 , la seconda in Γ_2 . Diciamo che le μ_i sono *uniformemente assolutamente continue in senso forte* rispetto alle λ_i , e scriviamo $\mu_i \ll_f \lambda_i$, se, per ogni intorno U di 0_2 esiste un intorno V di 0_1 tale che, per ogni $i \in I$ e $A \in \mathcal{A}$, sussista l'implicazione

$$\lambda_i^+(A) \subset V \Rightarrow \mu_i^+(A) \subset U.$$

Diciamo poi che le λ_i godono della *proprietà' C* (v. [13]) se, per ogni successione $(A_n)_n$ in \mathcal{A} , e per ogni successione $(i_n)_n$ in I , si ha l'implicazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{i_n}^+(A_n) = 0_1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{i_j}^+(A_n) = 0_1 \text{ per ogni } j \in \mathbb{N}.$$

Ad esempio, se le λ_i sono a valori in \mathbb{R}_0^+ , e costituiscono una successione crescente, allora esse godono della proprietà' C.

Nel caso in cui le masse in questione siano misure su σ -algebre, sotto certe ipotesi la condizione di uniforme assoluta continuita' assume una formulazione piu' semplice. La seguente proposizione, la cui dimostrazione (almeno nelle grandi linee) si puo' far risalire a R.Fiorenza (v. [7], teor. 2.2), illustra quanto detto.

Proposizione 4.9 *Supponiamo che Γ_1 sia metrizzabile, e che siano assegnate, sulla stessa tribu' \mathcal{T} , due famiglie di misure, $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ e $\{\mu_i\}_{i \in I}$, le prime a valori in Γ_1 , le seconde in Γ_2 . Supponiamo poi che le μ_i siano u.e. e che le λ_i godano della proprietà' C. Allora, condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $\mu_i \ll_f \lambda_i$ è che*

(*) *per ogni $A \in \mathcal{T}$ e $i \in I$ valga l'implicazione*

$$\lambda_i^+(A) = \{0_1\} \Rightarrow \mu_i^+(A) = \{0_2\}.$$

Dimostrazione. Se $\mu_i \ll_f \lambda_i$ è ovvio che si ha la (*). Proviamo allora il viceversa. Sia $(V_n)_n$ una successione d'intorni di 0_1 , tale che $V_n + V_n \subset V_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e inoltre $\{0_1\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Procedendo per assurdo, supponiamo che valga la (*), e che, tuttavia, esistano un intorno U di 0_2 , una successione $(A_n)_n$ di elementi di \mathcal{T} , e una successione $(i_n)_n$ in I , tali che risulti

$$\lambda_{i_n}^+(A_n) \subset V_n, \text{ e } \mu_{i_n}^+(A_n) \not\subset U.$$

Per la proprietà' C, è allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{i_j}^+(A_n) = 0_1$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Passando ad una opportuna sottosuccessione della $(A_n)_n$, potremo allora supporre che risulti

$\lambda_{i_j}^+(\limsup A_n) = \{0_1\}$, per ogni $j \in \mathbb{N}$. Denotando con A questo massimo limite, avremo pertanto $\mu_{i_j}^+(A) = \{0_2\}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Ma A é intersezione di una successione decrescente $(B_n)_n$ di elementi di \mathcal{T} (infatti, $B_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$); pertanto, per la uniforme esaustivita', dovrebbe essere $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{i_j}^+(B_n) = 0_2$ uniformemente in j , mentre risulta $\mu_{i_n}^+(B_n) \not\subset U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'assurdo trovato mostra l'asserto. ■

Un teorema analogo a 3.10 sussiste in relazione all'uniforme assoluta continuita' in senso forte, e si presenta come una estensione del teorema 2 di [13]. Occorre solo un lemma preliminare.

Lemma 4.10 *Sull'algebra \mathcal{A} sia definita una famiglia $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ di pre-misure, a valori in un gruppo metrizzabile Γ . Se le λ_i godono della proprieta' C , allora anche le estensioni $\widetilde{\lambda}_i$ ne godono.*

Dimostrazione. Sia $(B_n)_n$ una successione di elementi di $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, e sia $(j_n)_n$ una successione in I , in modo da aversi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{\lambda}_{j_n}^+(B_n) = 0.$$

Sia $(V_n)_n$ una successione decrescente d'intorni di 0, avente $\{0\}$ come intersezione. Per ogni intero n , esiste (v. 4.2) un insieme $A_n \in \mathcal{A}$ tale che si abbia, per ogni $k \leq n$,

$$\widetilde{\lambda}_{j_k}^+(A_n \Delta B_n) \subset V_n.$$

Si ha allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{\lambda}_{j_n}^+(A_n \Delta B_n) = 0$, e quindi anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{j_n}^+(A_n) = 0$. Per la proprieta' C delle λ_i , si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{j_k}^+(A_n) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e percio' anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{\lambda}_{j_k}^+(B_n) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 4.11 *Sulla medesima algebra \mathcal{A} siano $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, $\{\mu_i\}_{i \in I}$ due famiglie di masse, le prime a valori in Γ_1 , le seconde in Γ_2 . Supponiamo che Γ_1 sia metrizzabile, e che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:*

- a) per ogni $i \in I$, sia $\mu_i \ll \lambda_i$;
- b) le masse μ_i siano u.e., e ogni λ_i sia esaustiva;
- c) le masse λ_i godano della proprieta' C .

Allora si ha $\mu_i \ll_f \lambda_i$.

Dimostrazione. Trattiamo dapprima il caso particolare in cui le masse μ_i , λ_i , $i \in I$, siano misure su una tribu'. Dalle ipotesi fatte, é evidente che vale la (*) di 4.9, e quindi si ha $\mu_i \ll_f \lambda_i$. Nel caso generale, proveremo che é possibile ricondursi alla situazione precedente. Innanzitutto, senza ledere la generalita', si puo' supporre che \mathcal{A} sia l'algebra dei sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi di uno spazio di Stone. In tal modo, le masse μ_i , λ_i , $i \in I$, sono pre-misure, in virtu' di 4.1. Si puo' allora passare alle misure λ_i , $\widetilde{\mu}_i$, per $i \in I$. Queste verificano ancora la relazione $\widetilde{\mu}_i \ll \widetilde{\lambda}_i$ per ogni $i \in I$, e le $\widetilde{\mu}_i$ sono ancora u.e. per 4.4. Infine, per il lemma precedente, le λ_i godono della proprieta' C . Applicando dunque il caso particolare gia' trattato, otterremo che $\widetilde{\mu}_i \ll_f \widetilde{\lambda}_i$ e, a maggior ragione, l'asserto. ■

Corollario 4.12 Sia Γ uno spazio di Banach, e sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una famiglia di masse, definite sull'algebra \mathcal{A} e a valori in Γ . Supponiamo che le μ_i siano u.e., e sia, per ogni $i \in I$, $\lambda_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ una massa di controllo per μ_i , in accordo con 2.6. Se le λ_i hanno la proprieta' C , anche le μ_i godono della stessa proprieta', e risulta

$$\lambda_i \ll_f \mu_i, \mu_i \ll_f \lambda_i.$$

Dimostrazione. La relazione $\lambda_i \ll_f \mu_i$ é conseguenza dell'ultima affermazione di 2.6. Essendo poi $\mu_i \ll \lambda_i$ per ogni $i \in I$, é possibile dedurre che anche le μ_i godono della proprieta' C . Applicando poi il teorema 4.11, é chiaro che risulta $\mu_i \ll_f \lambda_i$. ■

References

- [1] J.K.BROOKS: *On the existence of a control measure for strongly bounded vector measures*; Bull.Amer.Math.Soc. **77** (1971), 999-1001.
- [2] J.K.BROOKS: *Equicontinuous sets of measures and applications to Vitali's convergence theorems and control measures*; Adv. in Math. **10** (1973), 165-171.
- [3] R.CACCIOPPOLI: *Integrali impropri di Stieltjes. Estensione del teorema di Vitali*; Rend.Accad.Sci.Fis.Mat.Napoli (3) **35** (1929), 34-40.
- [4] F.CAFIERO: *Sulle famiglie compatte di funzioni additive d'insieme astratto*; Atti del IV Congresso U.M.I.(1951),30-40.
- [5] F.CAFIERO: *Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue*; Atti Accad.Naz.Lincei Rend.Cl.Sci.Fis.Mat.Natur.,(8) **12** (1952), 155-162.
- [6] F.CAFIERO: *Misura e Integrazione*, Monografie Matematiche a cura del C.N.R., Ed. Cremonese (Roma)(1959).
- [7] F.CAFIERO: *Sull'uniforme additivita'*; Symposia Mathematica, **2** (1968), 265-280.
- [8] J.DIESTEL, J.J.UHL: *Vector measures*; AMS Providence (1977).
- [9] L.DREWNOWSKI: *Decomposition of set functions*; Studia.Math. **48** (1973), 23-48.
- [10] L.DREWNOWSKI: *On control submeasures and measures*; Studia.Math. **50** (1974), 203-224.
- [11] V.M.DUBROVSKII: *Su alcune proprieta' delle funzioni completamente additive d'insieme e loro applicazioni alla generalizzazione di un teorema di Lebesgue*; Math.Sb.(N.S.) **20** (1947),317-329 (in russo).

- [12] V.M.DUBROVSKII: *Sulla base di una famiglia di funzioni completamente additive d'insieme e sulle proprietà di additività uniforme ed equicontinuità*; Dokl.Akad.Nauk.SSSR.(N.S.) **58** (1947), 737-740 (in russo).
- [13] V.M.KLIMKIN: *Equiabsolute continuity*; Math. Notes **25** **rm(1979)** , **103-109**.
- [14] M.SION: *Outer measures with values in a topological group*,Proc. London Math.Soc., (3)**19**(1969), 89-106.
- [15] M.SION: *A theory of semigroup valued measures*,Springer LN 355 (1973).
- [16] T.TRAYNOR: *The Lebesgue decomposition for group-valued set functions*; Trans.Amer.Math.Soc.**220**(1976), 307-319.