Soddisfacibilità probabilistica
Un'introduzione elementare a CPA

Marco Baioletti
Dip. di Metodi Quantitativi
Università degli Studi di Siena

1 Introduzione

Questo articolo é una riformulazione dei principali risultati teorici ottenuti da me e da altri (A. Capotorti, S. Tulipani e B. Vantaggi) in vari articoli riguardanti il problema della soddisfacibilità probabilistica. In particolare in questo lavoro si usa un ambiente di lavoro molto più elementare (e a mio avviso più intuitivo) di quello utilizzato nei lavori originali.

Infatti mentre l'ambiente originale é quello delle algebre di Boole e delle misure definite su di esse, in questo lavoro si farà solamente uso dello spazio degli assegnamenti di verità (chiamati mondi possibili).

Tutti i principali risultati già pubblicati verranno riletti con questa più semplice chiave di lettura. Non necessariamente le dimostrazioni saranno più corte o più eleganti, sono solo gli strumenti matematici utilizzati ad essere più elementari. Il maggior pregio, a mio avviso, di questo approccio é quello che nelle varie dimostrazioni i modelli di CPA sono dati in modo costruttivo.

2 Assegnamenti di verità

Definizione 2.1 *Dato un insieme finito di variabili $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$, l'insieme di tutti gli* **assegnamenti di verità**, *o* **mondi possibili**, *indicato con 2^V, é l'insieme di tutte le funzioni $\alpha : V \to \{0, 1\}$.*

Definiamo ora alcune operazioni sugli assegnamenti.

Definizione 2.2 *Dato $U \subseteq V$, si indicherà con $\alpha[U]$ il restringimento di α su U, cioé*

$$\alpha[U] \in 2^U \qquad \alpha[U](X_i) = \alpha(X_i) \text{ per } X_i \in U.$$

Definizione 2.3 *Dati $\alpha \in 2^U$ e $\beta \in 2^V$, con $U \cap V = \emptyset$, si indicherà con $\alpha \cdot \beta$ l'incollamento di α e β, cioé*

$$\alpha \cdot \beta \in 2^{U \cup V} \qquad (\alpha \cdot \beta)(X_i) = \begin{cases} \alpha(X_i) & \text{se } X_i \in U \\ \beta(X_i) & \text{se } X_i \in V \end{cases}$$

Definizione 2.4 *Come caso particolare dell'incollamento, dato $\alpha : U \to \{0, 1\}$, $v \in \{0, 1\}$ e $X_j \notin U$, si indicherà con $\alpha^{(j/v)}$ l'assegnamento di $2^{U \cup \{X_j\}}$ definito da*

$$(\alpha^{(j/v)})(X_i) = \begin{cases} \alpha(X_i) & \text{se } X_i \in U \\ v & \text{se } i = j \end{cases}$$

3 Soddisfacibilità logica

Riassumiamo brevemente alcuni risultati del problema della soddisfacibilità della logica proposizionale. Alcuni di questi risultati ci torneranno utili in seguito.

3.1 Definizioni generali

Definizione 3.1 *Una* **proposizione** *p su un insieme finito di atomi $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$ é definita ricorsivamente come un atomo, come la negazione $\neg$ di una proposizione o come la congiunzione $\wedge$, la disgiunzione $\vee$, l'implicazione $\supset$ e la doppia implicazione $\equiv$ applicata a due proposizioni.*

L'insieme di tutte le proposizioni su V verrà indicato con il simbolo $\mathcal{F}(V)$.

Un atomo o la negazione di un atomo viene chiamato **letterale** e una proposizione costituita da un solo letterale viene chiamata **proposizione atomica**.

Definizione 3.2 *Il valore di una proposizione p secondo un assegnamento $\alpha \in 2^V$ é denotato con $\alpha(p)$ e vale*

- $\alpha(\neg q) = 1 - \alpha(q)$
- $\alpha(q \wedge r) = \min\{\alpha(q), \alpha(r)\}$
- $\alpha(q \vee r) = \max\{\alpha(q), \alpha(r)\}$
- $\alpha(q \supset r) = \max\{1 - \alpha(q), \alpha(r)\}$
- $\alpha(q \equiv r) = 1 - |\alpha(q) - \alpha(r)|$

In particolare il fatto che $\alpha(p) = 1$ si dice che α **soddisfa** *p, o che α sia un* **modello** *di p, e si indica con $\alpha \models p$ e in caso contrario con $\alpha \not\models p$*

Definizione 3.3 *L'insieme di tutti gli assegnamenti su V che soddisfano p si indica con*

$$Mod(p) = \{\alpha \in 2^V : \alpha(p) = 1\}$$

$Mod(p)$ dipende anche da V e come tale, quando non è chiaro dal contesto, si dovrebbe scrivere $Mod_V(p)$, ove $V(p)$ é l'insieme delle variabili presenti in p.

Definizione 3.4 *Una proposizione p é* **soddisfacibile** *se $Mod(p) \neq \emptyset$, é* **insoddisfacibile** *se invece $Mod(p) = \emptyset$ e infine é una* **tautologia** *se $Mod(p) = 2^V$.*

Si noti inoltre che due proposizioni pur essendo diverse dal punto di vista sintattico, sono praticamente simili, ad esempio $X_1 \vee \neg X_2$ e $\neg(\neg X_1 \wedge X_2)$.

Definizione 3.5 *Due proposizioni p e q sugli stessi atomi V sono* **equivalenti***, $p \approx q$, se per ogni $\alpha \in 2^V$ si ha $\alpha(p) = \alpha(q)$, ovvero se $Mod(p) = Mod(q)$*

Indicheremo con $\perp$ la classe di equivalenza delle proposizioni insoddisfacibili e con $\top$ quella delle tautologie.

Ogni proposizione p ha diverse altre proposizioni equivalenti. In particolare si possono trovare delle forme convenienti di proposizioni, dette forme normali.

Le più comuni sono la forma normale congiuntiva (CNF) e la forma normale disgiuntiva (DNF).

Definizione 3.6 *Una proposizione p é in* **forma normale congiuntiva** *(CNF) se $p = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots p_n$ ove le sottoproposizioni p_i sono clausole congiuntive, ovvero disgiunzione di letterali.*

Definizione 3.7 *Una proposizione p é in* **forma normale disgiuntiva** *(DNF) se $p = p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n$ ove le sottoproposizioni p_i sono clausole disgiuntive, ovvero congiunzione di letterali*

3.2 Il problema SAT

Il classico problema SAT é quello di controllare se una proposizione p sia soddisfacibile. La sua formulazione precisa é la seguente

Definizione 3.8 *Il problema SAT consiste nel controllare se una data proposizione in CNF $p = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_m$ sia o meno soddisfacibile. Ciò consiste nel trovare, se esiste, un assegnamento di verità α tale che $\alpha(p_i) = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. In altri termini bisogna controllare che $\cap_{i=1}^{m} Mod(p_i) \neq \emptyset$.*

Il problema SAT é noto essere NP–completo, anzi é stato il primo problema ad essere dimostrato tale.

Un qualsiasi algoritmo per il problema SAT é in grado di risolvere anche il problema di controllare se una proposizione p é una tautologia (basta infatti controllare che $\neg p$ sia insoddisfacibile).

4 Soddisfacibilità probabilistica

Prima di definire il problema vogliamo introdurre alcune definizioni e notazioni utili.

Definizione 4.1 *Una distribuzione di probabilità sugli assegnamenti di verità su V é una funzione $\mu : 2^V \to [0,1]$ tale che*

$$\sum_{\alpha \in 2^V} \mu(\alpha) = 1 \tag{1}$$

Definizione 4.2 *Data una distribuzione di probabilità μ su V, possiamo definire una funzione di probabilità Π_μ sull'insieme $\mathcal{F}(V)$ di tutte le proposizioni su V come*

$$\Pi_\mu(p) = \sum_{\alpha \in Mod(p_i)} \mu(\alpha)$$

Proposizione 4.1 Π_μ *gode di tutte le proprietà standard di una funzione di probabilità:*

1. $\Pi_\mu(\top) = 1$
2. $\Pi_\mu(\bot) = 0$
3. $\Pi_\mu(\neg p) = 1 - \Pi_\mu(p)$
4. $\Pi_\mu(p) = \Pi_\mu(q)$ *se* $p \approx q$
5. $\Pi_\mu(p) = \Pi_\mu(p \wedge q) + \Pi_\mu(p \wedge \neg q)$
6. *se* $p \wedge q = \bot$, *allora* $\Pi_\mu(p \vee q) = \Pi_\mu(p) + \Pi_\mu(q)$
7. *se* $p \Rightarrow q$, *ovvero se* $Mod(p) \subseteq Mod(q)$, *allora* $\Pi_\mu(p) \leq \Pi_\mu(q)$.

Supponiamo di estendere il problema SAT sostituendo al valore booleano di ogni singola clausola congiuntiva un valore di probabilità.

Il problema suddetto si chiama PSAT e la sua formulazione precisa é

Definizione 4.3 *Un'istanza del problema PSAT é una terna (V, C, P) in cui C é un insieme di clausole congiuntive $\{p_1, \ldots, p_m\}$ sugli atomi $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$ e P é una funzione da C in $[0,1]$.*

Definizione 4.4 *Un'istanza di PSAT (V, C, P) é soddisfacibile se esiste una distribuzione di probabilità sugli assegnamenti di verità di V*

$$\mu : 2^V \to [0,1]$$

tale che

$$\Pi_\mu(p_i) = P(p_i), \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

Si noti che se fossero presenti anche clausole disgiuntive in C, non cambierebbe nulla infatti, $P(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_m) = \pi$ equivale a $P(\neg\lambda_1 \vee \ldots \vee \neg\lambda_m) = 1 - \pi$ e quindi una clausola disgiuntiva può essere efficacemente sostituita con una clausola congiuntiva.

Una formulazione matriciale del problema PSAT si ottiene enumerando tutti gli assegnamenti di verità su V $2^V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n}\}$ e associando ad ognuno di essi una variabile reale x_j, $j = 1, \ldots, 2^n$. Inoltre sia $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2^n})$ e sia $\pi = (P(p_i), \ldots, P(p_m))$ il vettore delle probabilità.

Si definisca quindi la matrice A di m righe e 2^n colonne i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_j \models p_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, 2^n$$

Si aggiunga infine una zeresima riga ad A composta di tutti uno e una zeresima componente a π anch'essa di tutti uno.

Il risultato fondamentale é che l'istanza di PSAT é soddisfacibile se e solo se il sistema

$$A\mathbf{x} = \pi$$

ammette una soluzione non negativa.

Infatti é facile far vedere che, posto $\mu(\alpha_j) = x_j$, si ha che

$$\sum_{j=1}^{2^n} a_{ij}x_j = \Pi_\mu(p_i) = P(p_i) \text{ per } i = 1, \ldots, m.$$

La presenza delle componenti in più fa sì che

$$\sum_{i=1}^{2^n} x_i = 1$$

4.1 Connessione con SAT

Se le probabilità richieste P sono tutte unitarie, allora PSAT é equivalente a SAT. Questo dimostra che SAT é un sottoproblema di PSAT.

Teorema 4.1 *Se la funzione P dell'istanza di PSAT é costantemente 1, allora l'istanza di PSAT é soddisfacibile se e solo se l'istanza di SAT corrispondente $p_1 \wedge \ldots \wedge p_m$ é soddisfacibile*

Dim. Supponiamo di avere un'istanza di PSAT (V, C, P) in cui $C = \{p_1, \ldots, p_m\}$ e in cui $P(p_i) = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e che questa sia soddisfacibile. Perciò esiste una funzione $\mu : 2^V \to [0, 1]$ che soddisfa le condizioni (2).

E' facile vedere che, indicato con

$$Supp(\mu) = \{\alpha \in 2^V : \mu(\alpha) > 0\},$$

vale $Supp(\mu) \subseteq Mod(p_i)$ per $i = 1, \ldots, m$. Infatti dalla condizione $\sum_{\alpha \in Mod(p_i)} \mu(\alpha) = 1$ e dalla (1) si ottiene che per ogni assegnamento α che non soddisfa almeno un p_i vale $\mu(\alpha) = 0$, ossia $\alpha \notin Supp(\mu)$.

Perciò dal fatto che $Supp(\mu) \neq \emptyset$ segue che $\cap_{i=1}^m Mod(p_i) \neq \emptyset$, ossia che p é soddisfacibile.

Viceversa, sia p soddisfacibile, allora esiste un assegnamento $\bar{\alpha}$ appartenente a tutti gli insiemi $Mod(p_i)$.

Per cui definendo

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \bar{\alpha} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che l'istanza di PSAT (V, C, P) in cui $C = \{p_1, \ldots, p_m\}$ e $P(p_i) = 1$ é soddisfacibile. ∎

Da questo si ottiene l'ulteriore risultato che il problema PSAT é almeno NP–arduo. In realtà PSAT é un problema NP–completo dato che per un risultato sulla programmazione lineare, esso ammette un certificato succinto, ossia una soluzione in cui al più $m + 1$ componenti sono non nulle e con precisione limitata.

Una notevole differenza tra PSAT e SAT é che 2PSAT, sottoproblema di PSAT in cui le proposizioni p_i sono composte da al più due letterali, é NP–completo, mentre 2SAT é risolubile in tempo polinomiale (anzi lineare).

Si ha infatti

Teorema 4.2 *2PSAT é NP–completo*

Dim. Si dimostrerà che 3COL, il problema di decidere se un grafo é 3–colorabile, é riducibile in tempo polinomiale a 2PSAT e perciò questo é NP–completo.

Sia $G = (U, E)$ il grafo e sia $U = \{1, \ldots, k\}$ l'insieme dei vertici del grafo.

Definiamo le variabili booleane X_{ir}, per $i = 1, \ldots, k$ e $r = 1, 2, 3$, tali che X_{ij} é vera se e soloe se il vertice i sarà colorato con il colore r.

Si dimostra facilmente che G é 3–colorabile se e solo se la proposizione in CNF

$$\begin{aligned} p_G \quad = \quad & \bigwedge_{i=1}^{k} (X_{i1} \vee X_{i2} \vee X_{i3}) \wedge \\ & \bigwedge_{i=1}^{k} [(\neg X_{i1} \vee \neg X_{i2}) \wedge (\neg X_{i2} \vee \neg X_{i3}) \wedge (\neg X_{i1} \vee \neg X_{i3})] \wedge \\ & \bigwedge_{[i,j] \in E} [(\neg X_{i1} \vee \neg X_{j1}) \wedge (\neg X_{i2} \vee \neg X_{j2}) \wedge (\neg X_{i3} \vee \neg X_{j3})] \end{aligned}$$

Purtroppo questa proposizione non é un'istanza di 2SAT, ma di 3SAT, che per il risultato precedente sarebbe direttamente equivalente a risolvere un'istanza di 3PSAT.

Facciamo invece vedere che la soddisfacibilità di p_G é equivalente a risolvere la seguente istanza di 2PSAT

$$\begin{array}{lcl} P(X_{ir}) & = & 1/3 \text{ per } i = 1, \dots, k \text{ e } r = 1,2,3 \\ P(\neg X_{ir} \vee \neg X_{is}) & = & 1 \text{ per } i = 1, \dots, k \text{ e } r, s = 1,2,3 \text{ con } r \neq s \\ P(\neg X_{ir} \vee \neg X_{jr}) & = & 1 \text{ per } i, j = 1, \dots, k \text{ e } r = 1,2,3 \text{ con } [i,j] \in E \end{array}$$

Si ha infatti che se l'istanza di 2PSAT é soddisfacibile, allora $P(X_{i1} \vee X_{i2} \vee X_{i3}) = 1$ e quindi per il teorema (4.1) p_G é soddisfacibile, ossia il grafo G é 3–colorabile.

Se invece G è 3–colorabile, allora p_G ammette almeno un modello α_1. In realtà è facile costruire altri due modelli α_2 e α_3 nel seguente modo: un modello per p_G rappresenta una colorazione dei vertici di G e gli altri due modelli si ottengono permutando i colori assegnati ai vertici.

Perciò è facile dimostrare che la seguente distribuzione

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

soddisfa il problema 2PSAT sopra descritto. ∎

5 CPA: Un altro modello di soddisfacibilità probabilistica

Un modo alternativo per indicare un assegnamento "parziale" di probabilità é quello di attribuire i valori di probabilità ad un insieme di eventi che sono specificati attraverso delle relazioni logiche.

Le relazioni logiche sono espresse attraverso delle clausole duali che rappresentano insiemi impossibili, ossia di probabilità nulla. Ad esempio il fatto che un evento E_1 é contenuto in un evento E_2 viene espresso con la clausola $E_1 \wedge \neg E_2$ sottointendendo $= \perp$.

Definizione 5.1 *Un* **assegnamento di probabilità**[1] **(numerico)** *(o* **istanza di CPA***) é una quadrupla $A = (V, C, P, t)$ in cui $V = \{X_1, \dots, X_n\}$ é un insieme di variabili, C é un insieme di clausole disgiuntive composte dalle variabili di V, P é una funzione da V a $[0, t]$ e t é un numero compreso tra 0 e 1*

Definizione 5.2 *Un assegnamento di probabilità $A = (V, C, P, t)$ é* **soddisfacibile** *se esiste una distribuzione di probabilità μ da 2^V in $[0, t]$ con le proprietà*

1. $\Pi_\mu(\top) = \sum_{\alpha \in 2^V} \mu(\alpha) = t$
2. $\Pi_\mu(X_i) = P(X_i)$ *per* $i = 1, \dots, n$
3. $\mu(\alpha) = 0$ *per ogni* $\alpha \in 2^V$ *tale che* $\exists K \in C \quad \alpha \models K$

Una tale funzione μ si chiama **modello** *per A.*

In pratica la condizione 3 si può scrivere come $\Pi_\mu(K) = 0$ per ogni $K \in C$.

Una formulazione matriciale simile a quella per PSAT é la seguente.

Si enumerino tutti gli assegnamenti di verità di 2^V che non soddisfano alcuna clausola di C $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, con $s \leq 2^n$, e ad ognuno di essi si associ una variabile reale non negativa x_i; sia quindi $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$.

Sia inoltre $\pi = (P(X_1), \dots, P(X_n))$.

Si costruisca la matrice A di n righe e s colonne i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_j \models X_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, s$$

Si aggiunga infine una zeresima riga ad A composta di tutti uno e una zeresima componente a π pari a t.

Perciò l'istanza di CPA é soddisfacibile se e solo se il sistema

$$A\mathbf{x} = \pi$$

[1] in realtà si può usare il termine probabilità solo se $t = 1$, ma si continuerà ad usarlo anche per ogni altro valore di $t \in [0, 1]$

ammette una soluzione non negativa.

Infatti é facile far vedere che, posto

$$\mu(\alpha_j) = \begin{cases} x_j & \text{se } \alpha_j \text{ non soddisfa alcuna clausola di } C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

μ é un modello per A.

La presenza delle componenti in più fa sì che

$$\sum_{i=1}^{s} x_i = t$$

6 Connessioni tra CPA e PSAT

CPA é chiaramente un sotto–problema di PSAT: infatti l'istanza di CPA (V, C, t, P) con $C = \{K_1, \ldots, K_m\}$ é equivalente all'istanza di PSAT (V, C', P') in cui $C' = \{X_1, \ldots, X_n, \bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_m\}$ ove per $i = 1, \ldots, m$ $\bar{K}_i$ é la negazione della clausola K_i (quindi é una clausola congiuntiva) e $P'(X_i) = P(X_i)$, mentre $P'(\bar{K}_i) = 1$ per $i = 1, \ldots, m$.

Quindi CPA é riducibile in tempo polinomiale a PSAT e nel passaggio si crea un'istanza di PSAT in cui si utilizzano le stesse probabilità iniziali per gli eventi–variabili X_i.

Non altrettanto si può dire per il passaggio inverso: il motivo fondamentale é che mentre PSAT con probabilità tutte 1 rimane NP–completo, CPA invece diventa banale nella stessa condizione e perciò non può esistere una riduzione in tempo polinomiale da PSAT a CPA che lascia inalterate le probabilità.

Meno ovvio é il fatto che anche CPA sia NP–completo, anche se la dimostrazione é praticamente un corollario del teorema (4.1), infatti l'istanza di PSAT che é soddisfacibile se e sono il grafo é 3–colorabile può essere trasformata in modo semplice in un'istanza di CPA.

Le variabili sono sempre X_{ir}, per $i = 1, \ldots, k$ e $r = 1, 2, 3$, la probabilità richiesta é sempre $1/3$, e le clausole sono $X_{ir} \wedge X_{is}$, per $i = 1, \ldots, k$ e $r, s = 1, 2, 3$ con $r \neq s$ e $X_{ir} \wedge X_{jr}$, per $i, j = 1, \ldots, k$ e $r = 1, 2, 3$ con $[i, j] \in E$.

Si noti addirittura che per avere un problema NP–completo basta tentare di risolvere CPA avente solo clausole con due variabili (detto 2CPA) e per giunta senza l'uso di variabili negate (problema complessivamente chiamato 2CPA$^+$).

7 CPA simbolico

Forniamo ora un'estensione del problema CPA che sarà utile per poter definire le regole di riscrittura utilizzate nell'algoritmo descritto nella sezione 9.

Definizione 7.1 *Un* **assegnamento di probabilità simbolico** $A(Z) = (V, C, P_Z, t_Z)$ *sulle variabili reali* $Z = \{Z_1, \ldots, Z_r\}$ *é un assegnamento di probabilità in cui* t_Z *e* $P_Z(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *sono polinomi di primo grado nelle variabili* Z, *anziché essere delle quantità numeriche.*

Definizione 7.2 *Un assegnamento di probabilità simbolico* $A(Z) = (V, C, P_Z, t_Z)$ *é soddisfacibile se esiste un vettore* $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_r)$ *di* $(\mathbb{R}_0^+)^r$ *tale che l'assegnamento di probabilità numerico* $A(\bar{z})$, *ottenuto sostituendo ogni variabile* Z_i *con il valore* $\bar{z}_i$, *per* $i = 1, \ldots, r$, *sia soddisfacibile.*

Definizione 7.3 *Un* **insieme di assegnamenti di probabilità simbolici vincolati** *(APSV) é una lista* $S(Z) = (A_1(Z), A_2(Z), \ldots, A_n(Z); D)$ *ove gli* $A_i(Z)$ *sono assegnamenti di probabilità simbolici sulle stesse variabili* Z *e* D *é un insieme di vincoli lineari nelle variabili* Z *espressi sotto forma di equazioni e disequazioni.*

Definizione 7.4 *Un tale insieme é soddisfacibile se esiste un vettore* $\bar{z} \in (\mathbb{R}_0^+)^r$ *che soddisfa i vincoli* D *e tale che gli assegnamenti* $A_i(\bar{z})$ *siano tutti soddisfacibili, per* $i = 1, \ldots, n$.

Ovviamente per un singolo assegnamento di probabilità simbolico vincolato si intenderà un insieme di APSV con $n = 1$.

Una singola istanza (numerica) di CPA è ovviamente un caso particolare di un APSV, in cui non ci sono né variabili Z, né vincoli.

8 Le regole per la riduzione di CPA

Esistono una serie di regole che permettono di ridurre la verifica di soddisfacibilità di un'istanza di CPA a quella di un insieme di APSV, quasi sempre di un solo elemento.

Indicheremo con $C[X_j/0]$ l'insieme di clausole ottenute da C sostituendo X_j con 0. Dato che le clausole sono intese come vincoli da porre uguale a zero, si avrà che in $C[X_j/0]$ ci saranno tutte le clausole in cui non appare X_j e, per ogni clausola di C del tipo $K \wedge \neg X_j$, ci sarà la clausola K, mentre le clausole in cui compare X_j non saranno presenti.

Analogamente si definirà $C[X_j/1]$.

Iniziamo con la regola più semplice

Teorema 8.1 (Regola R0 dell'istanza vuota) *Un APSV $S(Z) = (A(Z); D)$, in cui $A(Z) = (V, \emptyset, P, t)$, é soddisfacibile se e solo se D ammette soluzione*

Dim. La dimostrazione si riconduce banalmente al fatto che un'istanza di CPA senza clausole é sempre coerente, per cui un APSV senza clausole é soddisfacibile se e solo se l'insieme dei vincoli ammette una soluzione.

Se un'istanza di CPA ha n variabili e 0 clausole, allora senza perdita di generalità, si supponga che le probabilità $P(X_i)$ siano ordinate in senso crescente. Un modello si costruisce definendo un assegnamento α_i, per ogni variabile $X_i \in V$, tale che

$$\alpha_i(X_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j \geq i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

un assegnamento "esterno" $\alpha_0(X_i) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e infine un assegnamento di probabilità

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} P(X_1) & \text{se } \alpha = \alpha_1 \\ P(X_i) - P(X_{i-1}) & \text{se } \alpha = \alpha_i \text{ per qualche } 2 \leq i \leq n \\ t - P(X_n) & \text{se } \alpha = \alpha_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

E' facile far vedere che μ così definito soddisfa le proprietà 1, 2 e 3 dei modelli. Infatti la 1 é vera per costruzione della funzione μ in quanto

$$\sum_{i=0}^{n} \mu(\alpha_i) = P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_i - P_{i-1}) + \ldots + (t - P_n) = t.$$

La 2 é vera perchè

$$\Pi_\mu(X_j) = \sum_{i \leq j} \mu(\alpha_i) = P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_j - P_{j-1}) = P_j$$

Infine la condizione 3 é ovviamente verificata per mancanza di clausole. ∎

Teorema 8.2 (Regola R1 di spezzamento) *Un APSV $S(Z) = (A(Z); D)$, in cui $A(Z) = (V, C, P, t)$, é soddisfacibile se e solo se l'insieme di APSV $S_0(Z') = (A_0(Z'), A_1(Z'); D')$ é soddisfacibile, ove*

$$\begin{aligned} Z' &= Z \cup \{z_{i+r}, i \neq j\} \\ A_0(Z') &= (V', C_0, P_0, t_0) \\ A_1(Z') &= (V', C_1, P_1, t_1) \\ V' &= V \setminus \{X_j\} \\ C_0 &= C[X_j/0], \qquad C_1 = C[X_j/1] \\ t_0 &= t - P(X_j), \qquad t_1 = P(X_j) \\ P_1(X_i) &= z_{i+r}, \qquad P_0(X_i) = P(X_i) - z_{i+r} \text{ per } i \neq j \\ D' &= D \cup \{0 \leq z_{i+r} \leq t_1, 0 \leq P(X_i) - z_{i+r} \leq t_0, \text{ per } i \neq j\} \end{aligned}$$

in cui le variabili $\{z_{i+r}, i \neq j\}$ sono delle nuove variabili e X_j, detta variabile di spezzamento, é una qualsiasi delle variabili contenute in V.

Dim. Supponiamo per cominciare che $S(Z)$ sia soddisfacibile. Allora esiste un vettore $\bar{z}$ di $(\mathbb{R}_0^+)^r$ tale che $A(\bar{z})$ sia soddisfacibile, cioé esiste un modello $\mu : 2^V \to [0, \bar{t}]$ per $A(\bar{z})$, ove $\bar{t} = t(\bar{z})$.

Facciamo vedere che $A_1(Z')$ e $A_0(Z')$ sono soddisfacibili.

Sia $\bar{z}'$ il vettore ottenuto da $\bar{z}$ aggiungendo le componenti

$$\bar{z}'_{i+r} = \Pi_\mu(X_i \wedge X_j)$$

per $i \neq j$. Bisogna far vedere che $\bar{z}'$ soddisfa i vincoli D' e che gli assegnamenti di probabilità numerici $A_0(\bar{z}')$ e $A_1(\bar{z}')$ sono soddisfacibili.

La prima condizione é verificata in quanto i vincoli di D' già presenti in D sono verificati da $\bar{z}'$ dato che $\bar{z}$, sottovettore di $\bar{z}'$, verifica D; mentre i nuovi vincoli di D' sono verificati perché

$$\begin{array}{rcl} \bar{z}'_{i+r} & = & \Pi_\mu(X_i \wedge X_j) \leq \Pi_\mu(X_j) = \bar{P}(X_j) = \bar{t}_1 \\ \bar{z}'_{i+r} & = & \Pi_\mu(X_i \wedge X_j) \leq \Pi_\mu(X_i) = \bar{P}(X_i) \\ \bar{z}'_{i+r} & = & \Pi_\mu(X_i \wedge X_j) \geq \Pi_\mu(X_i) + \Pi_\mu(X_j) - \bar{t} = \bar{P}(X_i) + \bar{P}(X_j) - \bar{t} = \bar{P}(X_i) - \bar{t}_0 \end{array}$$

Si definisca $\mu_1 : 2^{V'} \to [0, \bar{t}_1]$ come $\mu_1(\alpha) = \mu(\alpha^{(j/1)})$. E' facile far vedere che μ_1 é un modello per $A_1(\bar{z}')$:

1. $\sum_{\alpha \in 2^{V'}} \mu_1(\alpha) = \sum_{\alpha \in 2^{V'}} \mu_1(\alpha'_1) = \sum_{\alpha \in 2^V, \alpha(X_j)=1} \mu(\alpha) = P(X_j) = \bar{t}_1$

2. $\Pi_{\mu_1}(X_i) = \sum_{\alpha \in Mod_{V'}(X_i)} \mu_1(\alpha) = \sum_{\alpha \in Mod_V(X_i), \alpha(X_j)=1} \mu(\alpha) = \Pi_\mu(X_i \wedge X_j) = \bar{z}'_{i+r} = \bar{P}_1(X_i)$

3. bisogna dimostrare che, per ogni $\beta \in 2^{V'}$, se $\beta \models K$, con $K \in C_1$, allora $\mu_1(\beta) = 0$. I casi sono due. Se $K \in C \cap C_1$ allora é ovvio che X_j non compare in K (sia negato che affermato) e quindi per $\alpha = \beta^{(j/1)}$ si ha $\alpha \models K$, quindi $\mu(\alpha) = 0$ e perciò $\mu_1(\beta) = \mu(\alpha) = 0$. Se invece $K \in C_1 \setminus C$ allora si ha che $K \wedge X_j \in C$, quindi per $\alpha = \beta^{(j/1)}$ si ha che $\alpha \models K \wedge X_j$ e quindi $\mu(\alpha) = 0 = \mu_1(\beta)$

Analogamente $\mu_0 : 2^{V'} \to [0, \bar{t}_0]$, definita come $\mu_0(\alpha) = \mu(\alpha^{(j/0)})$ é un modello per $A_0(\bar{z}')$.

Supponiamo ora che $S_0(Z')$ e $S_1(Z')$ sono soddisfacibili. Allora esiste un vettore $\bar{z}'$ che soddisfa i vincoli di D' e tale che $A_0(\bar{z}')$ e $A_1(\bar{z}')$ sono soddisfacibili. Per cui esistono due funzioni $\mu_1 : 2^{V'} \to [0, \bar{t}_1]$ e $\mu_0 : 2^{V'} \to [0, \bar{t}_0]$ modelli di $A_0(\bar{z}')$ e $A_1(\bar{z}')$.

Facciamo vedere che, posto $\bar{z}$ il vettore ottenuto da $\bar{z}'$ eliminando le componenti con indice superiore a r, l'assegnamento $A(\bar{z})$ é soddisfacibile grazie al modello μ dato da

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} \mu_1(\alpha[V']) & \text{se } \alpha(X_j) = 1 \\ \mu_0(\alpha[V']) & \text{se } \alpha(X_j) = 0 \end{cases}$$

Non é necessario controllare che $\bar{z}$ verifica i vincoli di D, perché già $\bar{z}'$ verifica i vincoli D' che contengono D' e nei vincoli D non compaiono le nuove variabili contenute in $Z' \setminus Z$.

∎

Teorema 8.3 (Regola R2 della clausola vuota) *Se in un assegnamento di probabilità simbolico vincolato $S(Z) = (A(Z); D)$, con $A(Z) = (V, C, P, t)$, C contiene una clausola vuota, allora $S(Z)$ è soddisfacibile se e solo se il sistema $D' = D \cup \{t = 0\}$ ammette soluzione.*

Dim.

Se C contiene una clausola vuota, eventualità che si verifica solitamente quando si pone a 1 X_i e in C c'é la clausola $\neg X_i$ (o viceversa), allora tutti gli assegnamenti α la renderanno vera e, di conseguenza, deve accadere che μ deve dare probabilità zero ad ognuno di essi. Per cui la probabilità totale t deve essere zero. D'altro canto, se D' ammette una soluzione $\bar{z}$, deve accadere che $t = 0$, e quindi $\mu(\alpha) = 0$ per ogni α é un modello (l'unico possibile) per $A(\bar{z})$. ∎

Teorema 8.4 (Regola R3 della clausola unitaria) *Se in un APSV $S(Z) = (A(Z); D)$ esiste una clausola unitaria $\{\lambda\}$, in cui $\lambda = X_j$ o $\lambda = \neg X_j$, allora S é soddisfacibile se e solo se $S'(Z) = (A'(Z); D')$ lo é ove*

$$\begin{array}{rcl} A'(Z) & = & (V', C', P', t) \\ V' & = & V \setminus \{X_i\} \\ C' & = & C[\lambda/0] \\ P'(X_j) & = & P(X_j) \text{ per } j \neq i \\ D' & = & D \cup \{P(\lambda) = 0\} \end{array}$$

Dim.

Applicando la regola R1 all'istanza $S(Z)$ usando X_j come variabile di spezzamento, si ottiene una coppia di istanze A_0 e A_1, in cui una delle due contiene una clausola vuota (ovviamente sarà A_1 se la clausola unitaria é X_j, A_0 altrimenti). Applicando quindi a questa istanza la regola R2 si ottiene l'asserto.

∎

Teorema 8.5 (Regola R4 del letterale puro) *Se in un APSV $S(Z) = (A(Z); D)$ esiste una clausola del tipo $X_i \wedge X_j$ e se X_i compare solo in questa clausola, allora $S(Z)$ é soddisfacibile se e solo $S'(Z) = (A'(Z); D')$ lo é, ove*

$$\begin{aligned} A'(Z) &= (V', C', P', t) \\ V' &= V \setminus X_i \\ C' &= C \setminus \{X_i \wedge X_j\} \\ P'(X_k) &= P(X_k) \textit{ per } k \neq i \\ D' &= D \cup \{P(X_i) \leq t - P(X_j)\} \end{aligned}$$

Dim. Se $S(Z)$ é soddisfacibile esiste un vettore $\bar{z}$ tale che esiste $\mu : 2^V \to [0, \bar{t}]$ modello di S.

Allora dimostriamo che S' é soddisfacibile grazie al modello $\bar{\mu} : 2^{V'} \to [0, \bar{t}]$ definito da

$$\bar{\mu}(\alpha) = \mu(\alpha^{(i/0)}) + \mu(\alpha^{(i/1)})$$

E' banale far vedere che $\Pi_{\bar{\mu}}(X_k) = P(X_k)$ se $k \neq i$.

Inoltre se $\alpha \in 2^{V'}$ é tale che $\alpha \models K$ con $K \in C'$ allora dato che X_i non compare in K e che $K \in C$ si ha che, posto $\beta_0 = \alpha^{(i/0)}$ e $\beta_1 = \alpha^{(i/1)}$, sia $\beta_0 \models K$ e $\beta_1 \models K$ e quindi $\mu(\beta_0) = 0$ e $\mu(\beta_1) = 0$ e da ciò $\bar{\mu}(\alpha) = 0$.

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \bar{P}(X_j) &= \Pi_{\bar{\mu}}(X_j) = \sum_{\alpha \models X_j} \mu(\alpha^{(i/0)}) + \mu(\alpha^{(i/1)}) = \\ &= \sum_{\alpha \models X_j} \mu(\alpha^{(i/0)}) = \Pi_{\bar{\mu}}(\neg X_i \wedge X_j) \leq \\ &\leq \Pi_{\bar{\mu}}(\neg X_i) = \bar{t} - \bar{P}(X_i) \end{aligned}$$

e da ciò si ottiene $P(X_i) \leq t - P(X_j)$.

Sia invece S' soddisfacibile, allora esiste un vettore $\bar{z}$ e esiste $\mu : 2^{V'} \to [0, \bar{t}]$ che verifica le condizioni 1, 2 e 3 per S'.

E' facile far vedere da $\bar{P}(X_i) \leq \bar{t} - \bar{P}(X_j)$ segue che esiste una funzione $\nu : 2^{V'} \to \bar{t}$ con le proprietà

1. $\nu(\alpha) \leq \mu(\alpha)$ per ogni $\alpha \in 2^{V'}$
2. $\nu(\alpha) = 0$ se $\alpha \models X_j$
3. $\sum \nu(\alpha) = \bar{P}(X_i)$

Per trovare ν basta, ad esempio, enumerare gli assegnamenti $\alpha \in 2^{V'}$ tali che $\alpha \not\models X_j$

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$$

e di trovare il più piccolo s tale che

$$\sum_{h=1}^{s} \mu(\gamma_h) \geq \bar{P}(X_i)$$

Tale s esiste in virtù del vincolo imposto $P(X_i) \leq t - P(X_j)$.

Allora si pone

$$\begin{aligned}
\nu(\gamma_h) &= \mu(\gamma_h) \text{ per } h < s \\
\nu(\gamma_s) &= \bar{P}(X_i) - \sum_{h=1}^{s-1} \mu(\gamma_h) \\
\nu(\gamma_h) &= 0 \text{ per } h > s
\end{aligned}$$

Per cui definendo $\bar{\mu} : 2^V \to [0, \bar{t}]$ tale che

$$\bar{\mu}(\beta) = \begin{cases} \mu(\beta[V']) - \nu(\beta[V']) & \text{se } \beta \not\models X_i \\ \nu(\beta[V']) & \text{se } \beta \models X_i \end{cases}$$

E' semplice far vedere che $\bar{\mu}$ soddisfa le condizioni 1, 2 e 3 per S.
In particolare

$$\Pi_{\bar{\mu}}(X_i) = \sum_{\alpha \in 2^{V'}} \nu(\alpha) = P(X_i)$$

e

$$\Pi_{\bar{\mu}}(X_i \wedge X_j) = \sum_{\alpha \in 2^{V'}, \alpha \models X_j} \nu(\alpha) = 0$$

∎

Indicheremo con $V(C)$ l'insieme delle variabili presenti nelle clausole appartenenti a C.

Teorema 8.6 (Regola R5 di separazione) *Se in un assegnamento di probabilità simbolico vincolato $S(Z) = (A(Z); D)$, con $A(Z) = (V, C, P, t)$, $C = C_1 \cup C_2$ con $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ e $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ allora $S(Z)$ é soddisfacibile se e solo se $S'(Z) = (A_1(Z), A_2(Z); D)$ é soddisfacibile, ove*

$$\begin{aligned}
A_1(Z) &= (V_1, C_1, P_1, t) \\
A_2(Z) &= (V_2, C_2, P_2, t) \\
V_1 &= V(C_1),\, V_2 = V(C_2) \\
P_1(X_i) &= P(X_i) \textit{ per } X_i \in V_1 \\
P_2(X_i) &= P(X_i) \textit{ per } X_i \in V_2
\end{aligned}$$

Dim. Se $S(Z)$ é soddisfacibile, allora lo é sicuramente anche $S'(Z)$, in quanto $A_1(Z)$ e $A_2(Z)$ sono sottoproblemi di $A(Z)$. Basterà infatti prendere un modello $\mu : 2^V \to [0, \bar{t}]$ per $A(Z)$ e definire come modelli per $A_1(Z)$ e $A_2(Z)$, rispettivamente,

$$\mu_1(\alpha) = \sum_{\beta \in 2^{V_2}} \mu(\alpha \cdot \beta), \qquad \text{per } \alpha \in 2^{V_1}$$

e

$$\mu_2(\alpha) = \sum_{\beta \in 2^{V_1}} \mu(\alpha \cdot \beta), \qquad \text{per } \alpha \in 2^{V_2}$$

Se invece $A_1(Z)$ e $A_2(Z)$ sono soddisfacibili allora esiste un vettore $\bar{z}$ tale che esistono due modelli μ_1 di $A_1(\bar{z})$ e μ_2 di $A_2(\bar{z})$.

Definendo una distribuzione su 2^V

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{t} \mu_1(\alpha[V_1]) \mu_2(\alpha[V_2])$$

si può dimostrare μ é un modello di $S(Z)$.

Per la proprietà 1 si ha direttamente

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in 2^V} \mu(\alpha) &= \frac{1}{t}\sum_{\alpha\in 2^V} \mu_1(\alpha[V_1])\mu_2(\alpha[V_2]) = \\
&= \frac{1}{t}\sum_{\beta\in 2^{V_1}} \mu_1(\beta) \sum_{\gamma\in 2^{V_2}} \mu_2(\gamma) \\
&= \frac{1}{t}t^2 = t
\end{aligned}$$

Invece per le altre due proprietà basta notare che se $V(q) \subseteq V_1$ allora $\Pi_\mu(q) = \Pi_{\mu_1}(q)$, mentre se $V(q) \subseteq V_2$ allora $\Pi_\mu(q) = \Pi_{\mu_2}(q)$.

E perciò si ha l'asserto.

∎

Teorema 8.7 (regola R6 delle inclusioni) *Se in un assegnamento di probabilità simbolico vincolato $S(Z) = (A(Z); D)$, con $A(Z) = (V, C, P, t)$, C ha solo clausole di inclusione (cioé del tipo $X_i \wedge \neg X_j$), allora $S(Z)$ è soddisfacibile se e solo se il sistema*

$$D' = D \cup \{P(X_i) \leq P(X_j) : X_i \wedge X'_j \in C\}$$

ammette soluzione.

Dim. Se $S(Z)$ è soddisfacibile, é facile far vedere che la corrispondente Π_μ deve rispettare, per monotonia, le disequazioni associate alle clausole di inclusione e quindi le nuove disequazioni aggiunte a D' sono soddisfatte.

Supponiamo invece che D' ammetta una soluzione $\bar{z}$. Si costruisca allora un'assegnamento di probabilità come nella regola R0, supponendo, senza perdita di generalità, che le variabili $X_1, \ldots, X_n$ siano ordinate per probabilità crescente. Facciamo vedere che in questo caso μ soddisfa anche la condizione 3 (la 1 e la 2 sono sicuramente verificate poiché valgono le stesse argomentazioni).

Vogliamo far vedere che se un assegnamento α_i rende vera una clausola di inclusione $X_l \wedge \neg X_j$, allora la sua probabilità é zero. Innanzitutto, né α_0 né α_1 possono rendere vera una clausola di inclusione, il primo perché assegna falso a tutte le variabili, il secondo perché le assegna vero.

Quindi questa eventualità si può verificare solo se $j < i \leq l$, in quanto X_l deve essere vero e X_j deve essere falso. Poiché $j < k$, allora valgono contemporaneamente $P(X_j) \leq P(X_k)$ (per l'ordinamento delle variabili) e $P(X_k) \leq P(X_j)$ (per il vincolo di inclusione) e quindi $P(X_k) = P(X_j)$, da cui $P(X_k) = \ldots = P(X_{i-1}) = P(X_i) = \ldots = P(X_j)$ e perciò $\mu(\alpha_i) = 0$.

∎

Questo risultato può essere estesa al caso in cui C contenga solo clausole binarie che, con opportuno rinominazione di alcune variabili (scambiare X_i con $\neg X_i$), diventano di inclusione. Nella rinominazione bisognerà sostituire anche la probabilità, che diventerà $t - P(X_i)$.

Per vedere se esiste questa rinominazione e, in caso positivo, trovarla, si può usare il seguente metodo.

Si costruisca un grafo avente come vertici le variabili X_i, gli archi (X_i, X_j) del grafo corrispondono alle clausole di C e sono etichettati con $=$ se esiste una clausola di inclusione tra X_i e X_j (sia in un verso che nell'altro), mentre sono etichettati con $\neq$ se esiste un altro tipo di clausola binaria tra X_i e X_j.

E' facile dimostrare che il grafo é due–colorabile con una colorazione che rispetta gli archi (stesso colore per vertici connessi con un arco etichettato con $=$, colore diverso per quelli connessi con un arco etichettato con $\neq$) se e solo se esiste una rinominazione che rende le clausole tutte di inclusione. Inoltre la colorazione indica quali variabili rinominare e quali no.

Teorema 8.8 (Regola R7 della cancellazione) *Se in un assegnamento di probabilità simbolico vincolato $S(Z) = (A(Z); D)$, con $A(Z) = (V, C, P, t)$, esiste una variabile X_j che non appare in nessuna clausola, allora $S(Z)$ è soddisfacibile se e solo se lo é $S'(Z) = (A'(Z); D)$ in cui $A'(Z) = (V', C, P', t)$, $V' = V \setminus \{X_j\}$ e $P' = P_{|V'}$.*

Dim. La dimostrazione é banale ed é basata sulla regola di separazione. ∎

9 Un algoritmo per CPA

In quest'ultima sezione diamo un'idea di come utilizzare le regole enunciate precedentemente per creare un algoritmo in grado di decidere istanze di CPA. Innanzitutto ogni regola può essere riletta come regola di riscrittura, in cui si sostituisce un APSV, all'interno dell'insieme degli APSV, con uno o più APSV più piccoli, aventi cioé con un minor numero di variabili e di clausole. Ogni regola fa invece aumentare la parte numerica introducendo nuovi vincoli.

Il procedimento riceve come input un'istanza di CPA che viene subito codificata direttamente come insieme di APSV.

Ad ogni passo si cerca di applicare una delle regole, dando priorità alle regole R0, R2, R3, R4, R5, R6, R7 e, se nessuna é applicabile si usa la regola R1, scegliendo opportunamente l'APSV e la variabile su cui effettuare lo splitting. Il motivo del fatto che l'utilizzo della regola R1 é procrastinato il più possibile é che la regola R1 é l'unica regola che aumenta il numero di variabili reali e quindi di conseguenza la grandezza dell'istanza da risolvere.

Il procedimento può terminare in caso di contraddizione esplicita (ad esempio se si trova una disequazione o un'equazione impossibile) o quando si ottiene un insieme di APSV senza più clausole e quindi senza più variabili.

Nella prima situazione l'istanza è incoerente.

Nella seconda situazione l'istanza è coerente se e solo se il sistema dei vincoli D ammette una soluzione, in base alla regola R0.

Il sistema dei vincoli può essere risolto utilizzando il metodo del simplesso o un qualsiasi altro algoritmo per la programmazione lineare.

Questo algoritmo é ovviamente esponenziale nel caso peggiore, anche per istanze di 2CPA. Si é pero dimostrato, sotto opportune ipotesi, che la sua complessità temporale media é polinomiale.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Baioletti, A. Capotorti, S. Tulipani, B. Vantaggi (2000) Elimination of Boolean variables for probabilistic coherence. *Soft Computing* vol. 4 N. 2, 81–88

[2] M. Baioletti, A. Capotorti, S. Tulipani, B. Vantaggi (2002) Simplification Rules for the Coherent Probability Assessment Problem. *Ann. of Math. and Artif. Intell.*, Vol. 35, 11–28.

[3] M. Baioletti, A. Capotorti, S. Tulipani (2003) Polynomial average time complexity of an algorithm for 2CPA. submitted to *Information and Computation.*

[4] M. Baioletti, A. Capotorti, S. Tulipani (2003) Procedures for the CPA problem based on the elimination of Boolean constraints, in *"Proceedings of Sixth International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing SAT'03"*, S.Margherita Ligure - Portofino (Italy), May 5-8 2003.

[5] K. A. Andersen, D. Pretolani (2001) Easy cases of probabilistic satisfiability, *Ann. of Math. and Artif. Intell.*, Vol. 33, 69–91.

[6] S. Tulipani (2001) Computational aspects of probability logics, in *Lectures on Soft Computing and Fuzzy Logic, Advances in Soft Computing*, Physica-Verlag, pp. 301–311.