.aux .aux .aux

Prova scritta di Matematica Discreta

- 01.09.2017 -

- Corso di Laurea Ingegneria Informatica ed Elettronica -

---

1. Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice è $(t-1)(t-2)^2$. Pertanto gli autovalori sono 1, con molteplicità 1 e 2 con molteplicità 2. Poichè l'autospazio di 2 ha dimensione 1, la matrice non è diagonalizzabile. È comunque triangolabile in $\mathbb{C}$. ...

2. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$W = \{(x, y, z) \mid x - 2y + 2z = 0\}.$$

Provare che il vettore $v = (1, -2, 2)$ è ortogonale a W e determinare una base ortonormale di W.

Si ha

$$W = \{(2y - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} =< (2, 1, 0), (-2, 0, 1) > .$$

A questo punto basta osservare che

$$(1, -2, 2) \cdot (2, 1, 0) = 0, \quad (1, -2, 2) \cdot (-2, 0, 1) = 0$$

per stabilire l'ortogonalità. Il resto dell'esercizio consiste nella ortonormalizzazione della base $\{(2, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ di W.

3. Determinare se esiste un intero x tale che

$$5x \equiv 8 \quad (mod\ 14).$$

Provare poi che se un tale x esiste allora tutti gli elementi della classe $[x] \in \mathbb{Z}_{14}$ sono soluzioni dell'equazione data.

Da $[5x] = [8]$ segue $[5][x] = [8]$, pertanto, ammesso che $[5]^{-1}$ esista in $\mathbb{Z}_{14}$, si ha

$$[x] = [8][5]^{-1}.$$

In questo caso si ha $[5][3] = [3][5] = [15] = [1]$. Allora $[5]$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{14}$ e si ha $[5]^{-1} = [3]$. Segue

$$[x] = [8][3] = [24] = [10].$$

Allora 10 è una soluzione dell'equazione. Il resto segue.