Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Secondo Test di GEOMETRIA del 18.12.2018

C

---

1. Determinare le equazioni del cambiamento di referimento cartesiano ortogonale dal sistema $R(O, x, y)$ a $R'(O', x', y')$ e viceversa, sapendo che essi sono contraversi, che l'asse x' è la retta di equazione $2x - y - 5 = 0$, orientata nel verso delle ascisse decrescenti, e che l'asse y' ha equazione $x + y = 0$.

Le due rette sono evidentemente ortogonali e si incontrano in $O'(2, -1)$. L'asse x' ha parametri direttori $(1, 2)$ pertanto i suoi possibili versori sono

$$i'(\frac{1}{\pm\sqrt{5}}, \frac{2}{\pm\sqrt{5}})$$

e poichè il verso è quello delle sacisse decrescenti, si dovrà scegliere il segno meno, quindi

$$i'(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}).$$

Analogamente l'asse y' ha parametri direttori $(2, -1)$, quindi

$$j'(\frac{2}{\pm\sqrt{5}}, -\frac{1}{\pm\sqrt{5}}).$$

Considerata la matrice del cambiamento di base in $V(\pi)$

$$M_I^{I'}(id) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

si trova che il suo determinante vale 1. Si ricava che dovendo essere i sistemi contraversi, deve essere

$$j'(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Allora, le equazioni del cambiamento di riferimento da R' ad R si ottengono come segue

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Trattando quest'ultimo come sistema lineare nelle incognite x', y', si ottengono le equazioni del cambiamento di riferimento da R a R'...

2. Determinare equazioni cartesiane e parametriche della la retta per il punto $P(-1, 2, 3)$, parallela al piano $\pi : 3x - 2y + 7z - 1 = 0$ ed incidente l'asse z. La retta cercata si può ottenere come intersezione del piano parallelo a π per P e del piano di asse l'asse z per P...

3. In $\mathbb{R}^3$ si determini la matrice del cambiamento di base da

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (2, 0, 0), (1, 0, -1)\}$$

a

$$\mathcal{B} = \{(0, 2, 1), (1, -1, 0), (2, 2, 1)\}.$$

Da

$$(x, y, z) = a(0, 2, 1) + b(1, -1, 0) + c(2, 2, 1) = (b + 2c, 2a - b + 2c, a + c),$$

si ricava

$$(x, y, z) = \frac{-x - y + 4z}{2}(0, 2, 1) + (-y + 2z)(1, -1, 0) + \frac{x + y - 2z}{2}(2, 2, 1),$$

allora:

- $(1, 1, 0) = -1(0, 2, 1) - 1(1, -1, 0) + 1(2, 2, 1)$
- $(2, 0, 0) = -1(0, 2, 1) + 0(1, -1, 0) + 1(2, 2, 1)$

- $(1,0,-1) = -\frac{5}{2}(0,2,1) - 2(1,-1,0) + \frac{3}{2}(2,2,1)$

allora
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} .$$

4. Determinare se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che
$$L(1,1,1) = (0,1,0,1), \qquad L(1,2,0) = (0,1,0,1),$$
$$L(0,0,3) = (1,1,0,0), \qquad L(1,-1,1) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1).$$

I vettori $(1,1,1), (1,2,0), (0,0,3)$ sono una base per $\mathbb{R}^3$, quindi esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le prime tre richieste. Si ha:
$$(x,y,z) = (2x-y)(1,1,1) + (y-x)(1,2,0) + \frac{-2x+y+z}{2}(0,0,3),$$
quindi
$$L(x,y,z) = (2x-y)(0,1,0,1) + (y-x)(0,1,0,1) + \frac{-2x+y+z}{2}(1,1,0,0) =$$
$$= (\frac{-2x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, 0, x).$$
Tale applicazione soddisfa anche la quarta richiesta.