FACOLTÀ di INGEGNERIA
Corso di Laurea Ing. Civile
Prova Scritta di GEOMETRIA del 28 Aprile 2008

[1] Verificare che l'applicazione lineare $L : R^3 \to R^3$ definita da

$$L(x, y, z) = (x + 2y, -2x + y + z, 2y + 3z)$$

é invertibile e determinarne l'inversa.

Per ogni $(a, b, c) \in R^3$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x - y - z = b \\ 2y + 3z = c \end{cases}$$

é di Cramer ed ammette come unica soluzione la terna

$$(\frac{1}{13}(a - 6b + 2c), \frac{1}{13}(6a + 3b - c), \frac{1}{13}(-4a - 2b + 5c)).$$

Segue che l'applicazione data é biiettiva e la sua inversa é

$$L^{-1}(x, y, z) = (\frac{1}{13}(x - 6y + 2z), \frac{1}{13}(6x + 3y - z), \frac{1}{13}(-4x - 2y + 5z)).$$

[2] Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y = k \\ x + ky = 1 \\ 2kx + 3y = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed eventualmente determinarle.

La matrice completa del sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & k \\ 1 & k & 1 \\ 2k & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante che vale $(k+1)(2k^2-2k+3)$ e si annulla solo per $k=-1$. Allora, per tutti i valori reali di k, con $k \neq -1$, il sistema non ha soluzione. Nel caso $k=-1$, la matrice ha rango 2. Allora il sistema corrispondente ha un'unica soluzione che si ricava, ad es., risolvendo il sistema di Cramer

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

[3] Determinare l'equazione del piano per il punto $P(1,-1,2)$, parallelo alla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x=z+1 \\ y=-z+3 \end{cases}$$

e ortogonale al piano $\alpha : x+2y+1=0$.

Il generico piano per P ha equazione

$$a(x-1)+b(y+1)+c(z-2)=0.$$

Le condizioni di parallelismo con la retta r e di ortogonalita' col piano α conducono al sistema lineare

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b=0 \end{cases}$$

il cui spazio di soluzioni é dato da $S_0 =< (-2,1,3) >$. Allora un'equazione del piano cercato si ottiene da

$$-2(x-1)+(y+1)+3(z-2)=0,$$

cioé

$$2x - y - 3z + 3 = 0.$$

[4] Si scriva un'equazione cartesiana dell'iperbole per il punto $P(3,1)$, avente per asintoti le rette $r : x + y + 1 = 0$ ed $s : x + 2y = 0$.

L'iperbole richiesta appartiene al fascio di coniche bitangenti alle rette date nei loro punti impropri, rispettivamente $R_\infty(1,-1,0)$ ed $S_\infty(2,-1,0)$. Le coniche degeneri del fascio sono quindi: una spezzata nelle due rette r ed s e l'altra nella retta impropria contata due volte. Allora l'equazione del fascio in coordinate omogenee é data da

$$(X + Y + T)(X + 2Y) + kT^2 = 0.$$

Il passaggio per il punto $P(3,1,1)$ fornisce $k = -25$. Segue che l'iperbole cercata ha equazione cartesiana

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + x + 2y - 25 = 0.$$

L.S.