

Prova Scritta di GEOMETRIA del 27 Settembre 2006
Soluzioni Proposte

1. Si noti che il sottospazio V e' generato dai vettori $(0, 3, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 2, 0, 0)$, quindi

$$V = \langle (0, 3, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle$$

ha dimensione 2. W ammette come generatori i vettori $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ ed ha dimensione 3. Poiche' i vettori della base di V appartengono a W , segue subito che $V \cap W = V$.

2. La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & 1-k & k \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante pari a $3 - k$. Pertanto, per ogni valore di k diverso da 3, il sistema e' di Cramer ed ammette una unica soluzione che si calcola nel modo solito. Nel caso $k = 3$ la matrice completa del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo minore

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo. Allora in questo caso il sistema non e' risolubile per il Teor. di Rouché-Capelli.

3. La parabola cercata appartiene al fascio di coniche (tutte parabole) bitangenti alla retta impropria in $P_\infty(1, 2, 0)$ ed alla retta $X - Y - T = 0$ nel suo punto $Q(4, 3, 1)$. Le coniche degeneri sono allora costituite, una dalle rette $T = 0$ e $X - Y - T = 0$ e l'altra dalla retta congiungente P_∞ e Q contata due volte. Allora l'equazione del fascio e' data da

$$(X - Y - T)T + k(2X - Y - 5T)^2 = 0.$$