Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 23.11.2018

---

1. Determinare se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che
- $L(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0)$,
- $L(2, 0, 2, 0) = (2, 0, 0)$,
- $L(-2, -1, 0, 0) = (-1, 0, -1)$,
- $L(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 1)$,
- $L(1, 1, 1, 1) = (2, 0, -1)$.

I vettori $(1, 1, 0, 0), (2, 0, 2, 0), (-2, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base per $\mathbb{R}^4$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le prime quattro richieste. Si ha:

$$(x, y, z, t) =$$
$$= (-x+2y+z+t)(1, 1, 0, 0)+\frac{1}{2}z(2, 0, 2, 0)+(-x+y+z+t)(-2, -1, 0, 0)+t(1, 0, 0, 1),$$

poi

$$L(x, y, z, t) =$$
$$= (-x+2y+z+t)L(1, 1, 0, 0)+\frac{1}{2}zL(2, 0, 2, 0)+(-x+y+z+t)L(-2, -1, 0, 0)+tL(1, 0, 0, 1) =$$
$$= (-x+2y+z+t)(1, 0, 0)+\frac{1}{2}z(2, 0, 0)+(-x+y+z+t)(-1, 0, -1)+t(0, 0, 1) =$$
$$= (y + z, 0, x - y - z).$$

Poichè $L(1, 1, 1, 1) = (2, 0, -1)$, l'applicazione trovata esiste.

2. Considerate le rette

$$r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases},$$

stabilire che esse sono sghembe e determinare la loro minima distanza.

Si ha:

$$r : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = -2u \\ y = -u - 1 \\ z = u \end{cases},$$

e si verifica subito che le due rette sono sghembe.
Posto $R(2t + 1, t - 2, t) \in r$ ed $S(-2u, -u - 1, u) \in s$, si ha

$$\overline{RS}(-2u - 2t - 1, -u - t + 1, u - t).$$

Poichè $r(2, 1, 1)$ ed $s = (2, 1, -1)$, otteniamo

- $\overline{RS} \perp r \Leftrightarrow 4u + 6t + 1 = 0$
- $\overline{RS} \perp s \Leftrightarrow 6u + 4t + 1 = 0.$

Il sistema di Cramer conseguente ha soluzione la coppia $(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{10})$, quindi $\overline{RS}(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 0)$. Infine

$$|\overline{RS}| = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

è la minima distanza tra le due rette.

3. Considerata la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^2 - y^2 - xy + 4x - y + 2 = 0,$$

stabilire che essa è riducibile e determinarne le componenti.

La matrice della conica

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, pertanto la conica data è semplicemente degenere. Le rette che dall'origine proiettano i punti impropri della conica hanno equazione complessiva

$$2x^2 - y^2 = (x - y)(2x + y) = 0,$$

pertanto le componenti della conica hanno equazioni del tipo

$$x - y + h = 0, \quad 2x + y + k = 0.$$

Da

$$2x^2 - y^2 - xy + 4x - y + 2 = (x - y)(2x + y) = (x - y + h)(2x + y + k)$$

si ricava infine $h = 1$ e $k = 2$.