Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ing. Civile

Appello di GEOMETRIA del 23.01.2014

Soluzioni Proposte

---

1. Sia $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e siano $id, L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rispettivamente l'applicazione identica e l'applicazione definita da $L(x, y, z) = (x - 2z, x + y, y - z)$. Posto

$$v_1 = 2e_1 - e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 + 2e_2 - e_3, \quad v_3 = 2e_1 + e_3,$$

determinare $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id)$ ed $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(L)$, essendo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Determinare inoltre l'inversa di $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id)$

Si ha:
- $e_1 = \frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 - \frac{1}{3}v_3$,
- $e_2 = -1v_1 + 0v_2 + 1v_3$,
- $e_3 = -\frac{4}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2 + \frac{5}{3}v_3$,

allora

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Si ha poi:
- $L(e_1) = (1, 1, 0) = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_3$,
- $L(e_2) = (0, 1, 1) = -\frac{7}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2 + \frac{8}{3}v_3$,

- $L(e_3) = (-2, 0, 1) = -\frac{8}{3}v_1 - \frac{4}{3}v_2 + \frac{7}{3}v_3$,

quindi

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

L'inversa della matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id)$ è

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare il piano parallelo alle rette

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

che stacca un segmento di lunghezza 5 sull'asse x.

I parametri direttori delle rette sono $r(1, 1, 1)$ ed $s(3, 3, 2)$. Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ il piano cercato. Le condizioni di parallelismo con le lette danno il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 3b + 2c = 0 \end{cases},$$

una cui soluzione è, ad es., $(1, -1, 0)$. Allora $\pi : x - y + d = 0$. Intersecando con l'asse x si ottiene $d = 5$.

3. Decomporre, se possibile, il vettore $v(2, 1, 3)$ secondo le direzioni orientate, nel verso delle y crescenti, delle rette

$$r_1 : \{ \begin{matrix} x = 2z - 1 \\ y = z \end{matrix}, \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z \end{cases}, \qquad r_3 : \begin{cases} x = -2z + 2 \\ y = 2z \end{cases}.$$

Vettori paralleli e concordi con le rette date, rispettivamente, sono del tipo

$$v_1(2x, x, x), \quad v_2(-2y, y, -y), \quad v_3(-2z, 2z, z),$$

con $x, y, z > 0$. Posto

$$v = v_1 + v_2 + v_3,$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}.$$

Tale sistema di Cramer ammette come unica soluzione la terna $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$, pertano il problema non ammette soluzione.

4. Considerata la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$, determinare l'iperbole equilatera ad essa tangente nel punto $P(2, 1)$, tangente inoltre alla retta $r : 2x - y + 5 = 0$ nel suo punto improprio e passante per $Q(1, -2)$.

La tangente alla circonferenza nel punto P è la retta $t : 2x + 3y - 7 = 0$. Il punto improprio della retta r è $R_\infty(1, 2, 0)$. Si può allora costruire il fascio di coniche tangenti a t in P e passanti per R_∞ e Q, la cui equazione è :

$$(2X + 3Y - 7T)(2X - Y - 2T) + k(2X - Y - 3T)(3X + 2Y - 4T) = 0.$$

Imponendo che essa sia soddisfatta dalle coordinate $(2, -1, 0)$ (del punto che indica la direzione ortogonale a quella di R_∞), si risolve il parametro.