Soluzioni della Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 23.01.2009

1. Determinare una base per l'immagine dell' applicazione lineare

$$L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^2$$

tale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

essendo $\mathcal{B} = \{(1,2,1),(0,0,1),(0,-1,3)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,1),(-1,1)\}$.

Si ha

$$L(x,y,z)_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L) \cdot (x,y,z)_{\mathcal{B}}$$

Da $(x,y,z) = a(1,2,1) + b(0,0,1) + c(0,-1,3) = (a, 2a-c, a+b+3c)$ si ottiene

$$a = x, \;\; b = 7x - 3y + z, \;\; c = 2x - y.$$

Allora

$$L(x,y,z)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 7x-3y+z \\ 2x-y \end{pmatrix} = (9x-3y+z, 12x-5y+2z).$$

Si ottiene:

$$L(x,y,z) = (9x-3y+z)(1,1) + (12x-5y+2z)(-1,1) = (-3x+2y-z, 21x-8y+3z).$$

Da cui

$$Im(L) = \{(-3x+2y-z, 21x-8y+3z) | x,y,z \in \mathtt{R}\} =< (-3,21),(2,-8),(-1,3) >,$$

allora $Im(L)$ ha dimensione 2 ed una sua base é costituita, ad esempio, dai vettori $(2,-8)$ e $(-1,3)$.

2. Verificare che la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^2 - 6xy + x - 3y = 0$$

é degenere e determinare le sue componenti.

La matrice della conica é

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

ed ha determinante nullo. Pertanto $\mathcal{C}$ é degenere. Le sue componenti sono due rette rispettivamente parallele alle rette di equazione complessiva $2x^2 - 6xy = 0$, cioé $x = h$ ed $x - 3y + k = 0$. Allora l'equazione $2x^2 - 6xy + x - 3y = 0$ deve essere equivalente all'equazione

$$(x - h)(x - 3y + k) = x^2 - 3xy + (k - h)x + 3hy - hk = 0.$$

Affinché questo accada deve aversi:

$$2(k - h) = 1,\ 6h = -3,\ hk = 0.$$

Quindi $h = -\frac{1}{2}, k = 0$. Le componenti di $\mathcal{C}$ sono allora le rette di equazioni $2x + 1 = 0$ ed $x - 3y = 0$

3. Discutere ed eventualmente risolvere, al variare del parametro reale k, il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3k \\ 2x + y = k \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema é

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3k \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante vale $-20k$.
Allora il sistema dato non ammette soluzioni ogni volta che $k \neq 0$, poiché

la matrice dei coefficenti ha sempre rango 2.
Nel caso $k = 0$, il sistema corrispondente é equivalente al sistema omogeneo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

che essendo di Cramer ha come unica soluzione la coppia $(0, 0)$.

4. Determinare, se esiste, un vettore geometrico v ortogonale alla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases},$$

parallelo al piano π di equazione $x - y + z = 0$ ed avente modulo unitario.

Sia $v = (a, b, c)$. I parametri direttori della retta r sono $(2, 2, -1)$ mentre i parametri di giacitura del piano π sono $(1, -1, 1)$. Le due condizioni date conducono al sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + 2b - c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}.$$

Da questo si ricava $v = (-\frac{1}{4}c, \frac{3}{4}c, c)$. Afiché v abbia modulo pari a 1 deve essere

$$c\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16} + 1} = 1,$$

da cui, ad es., $c = \sqrt{\frac{8}{13}}$.
Uno dei vettori richiesti é allora $v = (-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{13}}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{13}}, \sqrt{\frac{8}{13}})$.