Soluzioni della Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 22.02.2008

1. Considerate le applicazioni lineari

$$L : \mathtt{R}^4 \to \mathtt{R}^2, \quad L(x, y, z, t) = (2x - z, t - y)$$

e

$$T : \mathtt{R}^2 \to \mathtt{R}^3, \quad T(x, y) = (2x - 3y, x + y, x - 2y),$$

si determini il nucleo della applicazione composta $T \circ L$.

Si ha

$$T(L(x,y,z,t)) = T(2x-z,t-y) = (4x-2z-3t+3y, 2x-z+t-y, 2x-z-2t+2y) =$$

$$= (4x + 3y - 2z - 3t, 2x - y - z + t, 2x + 2y - z - 2t).$$

Il nucleo dell'applicazione coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 4x + 3y - 2z - 3t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \\ 2x + 2y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

per risolvere il quale, essendo la matrice dei coefficienti di rango 2, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2z + 3t \\ 2x - y = z - t \end{cases}$$

Segue che $Ker(T \circ L) =< (\frac{1}{2}, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) >$.

2. Studiare la curva algebrica di equazione

$$\mathcal{C} : x^3 + xy^2 - 2x^2y - 2y^2 + x + 2 = 0$$

nei suoi punti impropri e nel punto $P(0, 1)$.

I punti impropri della curva sono quelli delle tre rette di equazione complessiva

$$x^3 + xy^2 - 2x^2y = x(x - y)^2 = 0,$$

Pertanto sono i punti $Y_\infty(0, 1, 0)$ e $P_\infty(1, 1, 0)$, il secondo contato due volte. La generica retta $x = k$ per $Y_\infty(0, 1, 0)$ ha intersezioni proprie con la curva le cui coordinate si ricavano dall'equazione $(k-2)y^2 - 2k^2y + k^3 + k + 2 = 0$. Segue che Y_∞ e' punto semplice con tangente la retta di equazione $x = 2$. La generica retta $y = x+k$ per P_∞ ha intersezioni proprie con la curva le cui coordinate si ricavano dall'equazione $2x^2 - (k^2-4k+1)x + 2k^2 - 2 = 0$. Segue che P_∞ e' punto semplice e l'unica retta che ha molteplicita' di intersezione in P_∞ con la curva almeno 2 deve essere la retta impropria: essa e' la tangente. Il punto $P(0, 1)$ appartiene alla curva. Le derivate parziali prime del polinomio della curva calcolate in $P(0, 1)$ sono $f_x(P) = 2$ e $f_y(P) = -4$, allora il punto e' semplice con tangente la retta di equazione $2x-4(y-1) = 0$.

3. Determinare il piano per il punto $P(2, -1, 3)$, parallelo alla retta $r : x - 3z = 1,\ y + z = 3$ e ortogonale al piano $\pi : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$.

Il generico piano per P ha equazione $a(x - 2) + b(y + 1) + c(z - 3) = 0$. Poiche' $r(3, -1, 1)$ e $\pi(2, -3, 4)$, le due condizioni date portano al sistema

$$\begin{cases} 3a - b + c = 0 \\ 2a - 3b + 4c = 0 \end{cases}$$

che ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1. Una qualunque soluzione fornisce l'equazione del piano cercato.

4. Decomporre, se possibile, il vettore geometrico $v(1.2, -1)$ in tre vettori rispettivamente paralleli ai vettori

$$v_1(2, 1, 0), \quad v_2(-1, 0, 2), \quad v_3(1, 1, 1).$$

I tre vettori v_i sono linearmente indipendenti, come si verifica facilmente, pertanto costituiscono una base per $\mathtt{R}^3$. Si tratta di scrivere il vettore v come combiazione lineare di questi tre:

$$v = av_1 + bv_2 + cv_3,$$

tale relazione porta al sistema lineare di Cramer

$$\begin{cases} 2a - b + c = 2 \\ a + c = 2 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$$