Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 21.06.2019 -

---

1. Determinare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(2,0,1),(0,0,1)\}$ base di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Si ricordi la formula

$$L(x,y,z)_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L)\ (x,y,z)_{\mathcal{B}}.$$

Si ha $(x,y,z) = y(1,1,1) + \frac{x-y}{2}(2,0,1) + \frac{-x-y+2z}{2}(0,0,1)$. Allora

$$L(x,y,z) = L(x,y,z)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \frac{x-y}{2} \\ \frac{-x-y+2z}{2} \end{pmatrix} = \dots$$

2. Studiare la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x^3 - 4y^3 + 3x^2y + x^2 + x - y = 0$$

nei suoi punti impropri e nell'origine.

I punti impropri della curva sono quelli delle rette di equazione complessiva $x^3-4y^3+3x^2y = (x-y)(x+2y)^2 = 0$, quindi i punti $P_\infty(1,1,0)$ e $Q_\infty(2,-1,0)$, quest'ultimo contato due volte. Si ha

$$C : X^3 - 4Y^3 + 3X^2Y + X^2T + XT^2 - YT^2 = 0,$$

quindi :

$$F_X(X,Y,T) = 3X^2 + 6XY + 2XT + T^2$$
$$F_Y(X,Y,T) = -12Y^2 + 3X^2 - T^2$$
$$F_T(X,Y,T) = X^2 + 2XT + 2XT - 2YT$$

Segue $F_X(P_\infty) = 9,\ F_X(P_\infty) = -9,\ F_X(P_\infty) = 1$, così P_∞ è punto semplice con tangente la retta di equazione $9X - 9Y + T = 0$.
Poi $F_X(Q_\infty) = 0,\ F_X(Q_\infty) = 0,\ F_X(Q_\infty) = 4$, così Q_∞ è punto semplice con tangente la retta impropria. Infine l'origine è anche un punto semplice con tangente la retta di equazione $x = y$.

3. Dopo aver stabilito che le rette

$$r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

sono sghembe, determinarne la minima distanza.

Dal determinante non nullo della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si ricava che le due rette sono effettivamente sghembe.
Posto $R(2t, 2t, t) \in r$ ed $S(-2v, v, 1) \in s$, si ha $\overline{RS} = (-2v-2t, v-2t, 1-t)$.
Imponendo l'ortogonalità del vettore $\overline{RS}$ con entrambe le rette si ricavano i punti di minima distanza ...