Soluzioni della Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 21.04.2009

1. Considerata l'applicazione lineare

$$L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3, \quad L(x,y,z) = (x - 2y + z, y + z.x - z),$$

verficare che si tratta di un isomorfismo lineare e determinare l'isomorfismo inverso.

Denotiamo con (a,b,c) un qualunque vettore fissato in $\mathtt{R}^3$ e consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + z = a \\ y + z = b \\ x - z = c \end{cases}$$

il quale è di Cramer ed ammette come unica soluzione la terna

$$(\frac{a - 2b + 3c}{4}, \frac{-a + 2b + c}{4}, \frac{a - 2b - c}{4}).$$

Allora l'applicazione data è biiettiva e la sua inversa $L^{-1} : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3$ è definita da $L^{-1}(x,y,z) = (\frac{x-2y+3z}{4}, \frac{-x+2y+z}{4}, \frac{x-2y-z}{4})$.

2. Determinare e classificare la conica tangente alla conica $\mathcal{C} : x^2 - 2y^2 + 2xy - 3y = 0$ nell'origine, alla retta $r : 2x - y + 1 = 0$ nel suo punto improprio e passante per $P(-1,1)$.

La tangente alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine è l'asse x. Allora si può costruire il fascio di coniche bitangenti all'asse x nell'origine (e pertanto alla $\mathcal{C}$) ed alla retta r nel punto $R_\infty(1,2,0)$. Le due coniche degeneri sono, una quella spezzata nella retta r e nell 'asse x e l'altra data dalla retta per 0 e per R_∞ contata due volte :

$$(2x - y + 1)y + k(y - 2x)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per P si ottiene il valore di k.

3. Determinare il versore ortogonale al piano $\pi : 2x - y + z + 2 = 0$, orientato nel verso delle y crescenti.

I parametri di giacitura del piano π sono dati da $(2, -1, 1)$, pertanto il vettore $v = (2, -1, 1)$ è ortogonale al piano. Poichè $||v|| = \sqrt{6}$, si hanno due possibili versori, con componenti $(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ e $(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})$, rispettivamente. Dovendosi scegliere quello orientato nel verso delle y crescenti, il versore cercato è

$$u = (\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}).$$

4. Determinare l'intersezione dei seguenti sottospazi di $\mathtt{R}^3$:

$$\mathcal{U} =< (1,1,1), (-2,0,3) >,$$
$$\mathcal{V} =< (2,3,0) > .$$

Un vettore che appartenga contemporaneamente ad entrambi i sottospazi deve essere del tipo $(a-2b, a, a+3b)$ per certi $a, b \in \mathtt{R}$, e $(2c, 3c, 0)$, per $c \in \mathtt{R}$. Si giunge pertanto al sistema lineare

$$\begin{cases} a - 2b - 2c = 0 \\ a - 3c = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$$

il quale ha come unica soluzione quella banale. Si ricava che $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{(0,0,0)\}$. (esistono metodi più veloci per risolvere il problema)