

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTALE
CORSO DI LAUREA ING. CIVILE
APPELLO DI GEOMETRIA DEL 20.07.2018 -

1. Data l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(x, y, z) = (x + y + 3z, x + 2y + 5z, -x - 3y - 7z),$$

provare che l'applicazione $L^2 = L \circ L$ non è biiettiva. Determinare inoltre i vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $L^2(x, y, z) = (1, 1, -1)$.

Si ha

$$\begin{aligned} L^2(x, y, z) &= L(x + y + 3z, x + 2y + 5z, -x - 3y - 7z) = \\ &= (-x - 6y - 13z, -2x - 10y - 22z, 3x + 14y + 31z). \end{aligned}$$

Il sistema lineare

$$\begin{cases} -x - 6y - 13z = 0 \\ -2x - 10y - 22z = 0 \\ 3x + 14y + 31z = 0 \end{cases}$$

ha matrice dei coefficienti di rango 2, così $\dim \text{Ker} L^2 = 1$. ed L^2 non è un isomorfismo. Per la seconda domanda basta considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} -x - 6y - 13z = 1 \\ -2x - 10y - 22z = 1 \\ 3x + 14y + 31z = -1 \end{cases}$$

2. Considerati i piani

$$\pi_1 : 2x + y - z + 1 = 0,$$

$$\pi_2 : x + y - 5 = 0,$$

$$\pi_3 : x + 2y + z - 7 = 0,$$

verificare che essi appartengono alla medesima stella di piani nello spazio ampliato proiettivamente.

Passando a coordinate omogenee si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X + Y - Z + T = 0 \\ X + Y - 5T = 0 \\ X + 2Y + Z - 7T = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti ha rango 3, dato dal minore

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

con determinante pari a 6. Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X + Y + T = Z \\ X + Y - 5T = 0 \\ X + 2Y - 7T = -Z \end{cases}$$

si ottiene che le sue soluzioni sono tutte proporzionali alla quaterna

$$\left(\frac{23}{6}, \frac{13}{6}, 1, 0\right).$$

Ovvero i tre piani contengono tutti il punto improprio $P_\infty(23, 13, 6, 0)$. Ovvero, sono tutti paralleli alla medesima retta.

3. Dopo aver verificato che le rette

$$r : \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

sono sghembe, determinare la loro minima distanza.

Le rette sono sghembe ed hanno equazioni parametriche, ad es.,

$$r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3} \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 3v + 1 \\ y = -2v \\ z = v \end{cases}$$

Presi punti generici

$$R(2t + 1, t, -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}) \in r, \quad S(3v + 1, -2v, v) \in s,$$

si costruisce il vettore $\overline{RS}(3v - 2t, -2v - t, v + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3})$