Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 20.04.2016

---

1. Considerate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dopo aver provato che A è invertibile, determinare $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che

$$AX + B = \overline{0}.$$

A è invertibile, avendo determinante non nullo. Allora

$$AX + B = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad AX = -B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}(-B).$$

A è la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ dalla base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ alla base canonica, quindi A^{-1} è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica a $\mathcal{B}$.

2. Determinare le rette parallele al piano xy ed incidenti le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z \end{cases}, \qquad r_3 : \begin{cases} x = -2z + 2 \\ y = 2z \end{cases}.$$

Una retta s parallela al piano xy ha equazione del tipo

$$s : \begin{cases} y = mx + p \\ z = q \end{cases},$$

Imponendo le condizioni di incidenza/complanarità con le tre rette date si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2mk + p - m - k = 0 \\ 2mk + p + m + k = 0 \\ 2mk - p - 2m + 2k = 0 \end{cases},$$

che ammette le soluzioni $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, -1)$. Allora le rette cercate sono due:

$$s_1 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad s_1 : \begin{cases} y = -x + 2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

3. Considerata la curva algebrica di equazione

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 - 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$$

studiarla nei suoi punti impropri e nel punto $P(1, 1)$.

Da

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 = x(x - y) = 0$$

si ottiene che i punti impropri della curva sono $Y_\infty(0, 1, 0)$ e $P_\infty(1, 1, 0)$, quest'ultimo contato due volte.
$Y_\infty(0, 1, 0)$ è semplice con tangente la retta di equazione $x = -2$. Anche $P_\infty(1, 1, 0)$ è semplice con tangente la retta impropria.