Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale
Test di Geometria del 16.12.2014

Soluzioni Proposte

1. Considerata l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ L(x, y, z) = (2kx - y, y - kz, x + ky + z),$$

determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui essa è invertibile e nel caso determinarne l'inversa. Negli altri casi determinarne nucleo ed immagine.

La matrice di L sulla base canonica è

$$M_C^C(L) = \begin{pmatrix} 2k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale $k(2k^2+3)$ e pertanto si annulla solo per $k = 0$. Allora l'applicazione data è invertibile per tutti i valori reali di k, tranne che per $k = 0$. Per $k \neq 0$ l'inversa di L si ottiene risolvendo il sistema di Cramer

$$\begin{cases} 2kx - y = a \\ y - kz = b \\ x + ky + z = c \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione

$$\left(\frac{D\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & -k \\ c & k & 1 \end{pmatrix}}{k(2k^2+3)}, \frac{D\begin{pmatrix} 2k & a & 0 \\ 0 & b & -k \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}}{k(2k^2+3)}, \frac{D\begin{pmatrix} 2k & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & k & c \end{pmatrix}}{k(2k^2+3)}\right).$$

Allora

$$L^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{D\begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ y & 1 & -k \\ z & k & 1 \end{pmatrix}}{k(2k^2+3)}, \frac{D\begin{pmatrix} 2k & x & 0 \\ 0 & y & -k \\ 1 & z & 1 \end{pmatrix}}{k(2k^2+3)}, \frac{D\begin{pmatrix} 2k & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & k & z \end{pmatrix}}{k(2k^2+3)}\right).$$

Nel caso $k = 0$ l'applicazione si scrive $L(x,y,z) = (-y,y,x+z)$. La sua immagine è il sottospazio $< (-1,1,0),(0,01) >$ di $\mathbb{R}^3$ e pertanto ha dimensione 2. Il nucleo di L deve avere dimensione 1 e coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases},$$

quindi $Ker(L) =< (1,0,-1) >$.

---

2. Date in $\mathbb{R}^3$ le basi

$$B = \{(1,1,0),(-1,0,2),(-2,1,0)\}, \quad B' = \{(0,-1,2),(1,-1,1),(1,-2,-1)\},$$

determinare la matrice del cambiamento di base da B a B'. Se $v \in \mathbb{R}^3$ è tale che $v_B = (-1,0,1)$, determinare $v_{B'}$.

Si ha:
$(1,1,0) = -\frac{5}{4}(0,-1,2) + \frac{7}{4}(1,-1,1) - \frac{3}{4}(1,-2,-1)$

$(-1,0,2) = \frac{5}{4}(0,-1,2) - \frac{3}{4}(1,-1,1) - \frac{1}{4}(1,-2,-1)$

$(-2,1,0) = 1(0,-1,2) - 2(1,-1,1) + 0(1,-2,-1)$
allora

$$M_{B'}^{B}(id) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -2 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha poi

$$v_{B'} = M_{B'}^{B}(id)v_B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -2 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\frac{9}{4}, -\frac{15}{4}, -\frac{3}{4}).$$

3. Nel piano π con un riferimento cartesiano $R(O,x,y)$, sia $R'(O',x',y')$ il sistema di riferimento cartesiano contraverso con R, ove l'asse y' è la retta di equazione $2x - 4y - 1 = 0$, orientata nel verso delle ordinate crescenti, e $O'(-2, \frac{5}{4})$. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento da R a R' e viceversa.

I parametri direttori dell'asse y' sono $(1, m) = (1, \frac{1}{2}) \simeq (2, 1)$, allora il suo versore è $j' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, visto l'orientamento assegnato. L'asse x' è la retta per O' ortogonale ad y', ed ha parametri direttori $(1, -2)$, così i suoi possibili versori sono $i' = (\frac{1}{\pm\sqrt{5}}, \frac{-2}{\pm\sqrt{5}})$. Poichè la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

ha determinante -1, si dovrà scegliere $i' = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Allora le equazioni del cambiamento di riferimento da R' ad R sono

$$\begin{cases} x = -2 - \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{5}{4} + \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases} .$$

Risolvendo il sistema nelle variabili x' e y' si ottiene

$$\begin{cases} x' = \frac{9}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y \\ y' = -\frac{11}{4\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases} ,$$

ovvero le equazioni del cambiamento di riferimento da R ad R'.

---

4. Verificare che la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + y^2 - 3xy + 5x - 3y + 2 = 0$ è degenere e determinarne le componenti ed i punti doppi.

La matrice della conica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo, pertanto essa è degenere. Le rette che dall'origine proiettano i punti impropri della conica hanno equazione complessiva $2x^2 + y^2 - 3xy = 0$. Posto $t = \frac{x}{y}$ si ottiene $2t^2 - 3t + 1 = 0$ e quindi $t = \frac{1}{2}, 1$. Allora

$$2x^2 + y^2 - 3xy = (x - y)(2x - y).$$

Si deve avere

$$2x^2 + y^2 - 3xy + 5x - 3y + 2 = (x - y + p)(2x - y + q) =$$

$$= x^2 - 2y^2 - 3xy + (2p + q)x - (p + q)y + pq,$$

pertanto

$$\begin{cases} 2p + q = 5 \\ p + q = 3 \\ pq = 2 \end{cases},$$

da cui si ricava $p = 2$ et $q = 1$. Ne segue che le componenti della conica sono le rette $r : x - y + 2 = 0$ ed $s : 2x - y + 1 = 0$. L'unico punto doppio della conica è il punto $r \cap s = P(1, 3)$.

5. Considerata la curva algebrica $\mathcal{C} : x^4 - 2x^2y^2 + x^3y + 3x^2 - y - 2 = 0$, se ne studino i punti impropri ed il punto $P(0, -2)$.

Le rette che dall'origine proiettano i punti impropri della curva hanno equazione complessiva

$$x^4 - 2x^2y^2 + x^3y = x^2(x^2 - y^2 + xy) = x^2(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}y)(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}y) = 0.$$

Allora i punti impropri della curva sono quello dell'asse y, cioè $Y_\infty(0, 1, 0)$, contato due volte, ed i punti impropri $P_\infty(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 2, 0)$, $Q_\infty(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -2, 0)$ delle altre due rette, rispettivamente. Questi ultimi due sono entrambi semplici, come si verifica facilmente per via analitica. Studiamo Y_∞:
la generica retta per esso ha equazione $x = k$ ed intersecandola con la curva si ottiene l'equazione

$$-2k^2y^2 + (k^3 - 1)y + k^4 + 3k^2 - 2 = 0$$

che fornisce le ordinate dei punti propri comuni alla curva ed alla retta. Per k generico tale equazione ha sempre due soluzioni, il che ci dice che delle quattro intersezioni curva-retta due devono necessariamente cadere in Y_∞, il quale è pertanto un punto doppio. La retta $x = 0$ ha invece una sola intersezione propria con la curva e tre intersezioni riunite in Y_∞. Ne segue che le due tangenti in Y_∞ coincidono con l'asse y.