FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Ing. Civile

Appello di GEOMETRIA del 16.09.2013

---

1. Sia $L : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita come segue

$$L\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x-y+t, hx+z+t, y+z).$$

Determinare $Ker(L)$, al variare del parametro reale h. Determinare inoltre la matrice di L, rispetto a basi scelte arbitrariamente.

$$Ker(L) = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : (x-y+t, hx+z+t, y+z) = (0,0,0)\}.$$

Si deve allora risolvere il siastema omogeneo

$$\begin{cases} x-y+t=0 \\ hx+z+t=0 \\ y+z=0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema ha rango 3 per $h \neq 1$ e rango 2 altrimenti. Allora nel caso $h \neq 1$ si ottiene

$$Ker(L) = \{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = <\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}>.$$

Se $h = 1$ il sistema sopra si riduce a

$$\begin{cases} x-y+t=0 \\ x+z+t=0 \end{cases},$$

da cui

$$Ker(L) = \{\begin{pmatrix} x & x+t \\ -x-t & t \end{pmatrix} : x,t \in \mathbb{R}\} = <\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}>.$$

Si consideri poi la base canonica in $\mathbb{R}^3$ e la base standard $\mathcal{S} = \{E_{ij} : i, j = 1, 2\}$ di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Si ha, ad esempio,

$$L(E_{11}) = (1, h, 0), L(E_{12}) = ...$$

da cui

$$M(L)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ h & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Verificare che la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^2 - 2y^2 - 3xy + 5x + 5y - 3 = 0$$

è degenere e determinarnrne le componenti.

I punti impropri della conica sono $P_\infty(1, -2, 0)$ et $Q_\infty(2, 1, 0)$. Allora

$$2x^2 - 2y^2 - 3xy + 5x + 5y - 3 = (x - 2y + p)(2x + y + q).$$

Ponendo

$$rang \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 5 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & -3 & q + 2p & p - 2q & pq \end{pmatrix} = 1$$

si ottiene $p = 3,\ q = -1$.

3. Determinare la retta per l'origine incidente la retta impropria del piano $\pi : x - 2y - z - 1 = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

La retta cercatata si ottiene come intersezione del piano per l'origine parallelo a π e del piano per l'origine e per r.