Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale

Appello di GEOMETRIA del 15.09.2017

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche di è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y) = (x - y, y, 2x + y)$. Stabilire se $T \circ L$ è invertibile; in caso contrario calcolarne il nucleo.

Si ha

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 3y + 2z, 2y - 2z),$$

pertanto $T \circ L(x, y, z) = (x + y + 4z, 2y - 2z, 2x + 8y + 2z)$. *La matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2*, quindi il sistema omogeneo*

$$\begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$$

ha spazio delle soluzioni di dimensione 1*. Si ha* $Ker(T \circ L) = \ldots$
In particolare la composizione $T \circ L$ *non è invertibile.*

2. Determinare l'iperbole equilatera tangente alla retta $r : x + y - 1 = 0$ nel punto $P(2, -1)$, passante per $Q(2, 3)$ e avente come asintoto l'asse y.

Si può considerare il fascio di coniche bitangenti alla retta r in P e all'asse $x = 0$ nel suo punto improprio $R_\infty(0, 1, 0)$. L'equazione del fascio è quindi

$$x(x + y - 1) + k(x + 1)^2 = 0.$$

Il passaggio per Q fornisce il valore $k = -\frac{8}{9}$. La conica che si ottiene non è una iperbole equilatera poichè non contiene il punto $S_\infty(1, 0, 0)$, che indica la direzione ortogonale a quella di R_∞.

3. Considerate le rette

$$r : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases},$$

si provi che esse sono complanari e si determini il piano che le contiene.

Verificata la complanarità delle due rette, si può ad es. imporre che i fasci di piani da esse determinati abbiano un piano in comune. Questo accade quando le due equazioni

$$x - y + 1 + h(x + z - 1) = 0$$

e

$$x - 2z - 1 + k(y + z - 2) = 0$$

sono equivalenti ...