Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ing. Civile

Appello di GEOMETRIA del - 15.09.2015

---

1. Condiderata l'applicazione $L : \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3\times 3} \to \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3\times 3}$, tale che

$$L(A) = A + A^t,$$

provare che è lineare. Determinarne il nucleo e la dimensione dell'immagine.

Per $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3\times 3}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$L(A+B) = (A+B) + (A+B)^t = A + B + A^t + B^t =$$

$$= A + A^t + B + B^t = L(A) + L(B),$$

$$L(\lambda A) = (\lambda A) + (\lambda A)^t = \lambda A + \lambda A^t = \lambda(A + A^t) = \lambda L(A),$$

pertanto l'applicazione è lineare.
Si ha poi

$$L(A) = \overline{0} \Leftrightarrow A + A^t = \overline{0}$$

cioè

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -x' & -x'' \\ -y & -y' & -y'' \\ -z & -z' & -z'' \end{pmatrix} = -A^t$$

da cui si ottiene $x = y' = z'' = 0$, $x'' = -z$, $x' = -y$, $y'' = -z'$, cioè

$$A = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ -y & 0 & z' \\ -z & -z' & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$Ker\ L = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \}.$$

Dalla formula di Grassmann segue infine

$$9 = 3 + dim\ Im\ L \Rightarrow dim\ Im\ L = 6.$$

2. Discutere e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2(k-1)x + 2y - z = 2(k+1) \\ 2x + 2ky + 2z = 4k^2 + 3 \\ 4kx + 2(2k+1)y + (2k+1)z = 16k^3 - 2k^2 - k + 5 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

La matrice A del sistema dato ha determinante $D(A) = 4k(k-1)(2k-1)$. Allora per tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $\frac{1}{2}$, 1, il sistema è di Cramer ed ammette l'unica soluzione

$$(\frac{16k^2 + 34k + 19}{2(2k-1)}, -3(2k+1), \frac{16k^3 - 10k^2 - 17k - 11}{2k-1}).$$

Per $k = 0$ il rango di A e della matrice completa $\tilde{A}$ coincidono e valgono 2. Allora il sistema ha un insieme di soluzioni di dimensione 1

$$S = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0) + < (-1, -\frac{1}{2}, 1) > .$$

Per $k = \frac{1}{2}$ si ha $rangA = 2$ e $rang\tilde{A} = 3$, cosicchè il sistema non ha soluzioni. Per $k = 1$ si ha ancora che il rango di A e della matrice completa $\tilde{A}$ coincidono e valgono 2...

3. Determinare l'equazione del piano per $P(1, -3, -2)$ ortogonale al piano $\pi : x + 3y - z - 5 = 0$ e parallelo alla retta

$$t : \begin{cases} 2x - 3z + 1 = 0 \\ x = 0. \end{cases} .$$

Il piano cercato ha equazione del tipo

$$a(x-1) + b(y-3) + c(z-2) = 0.$$

La retta t ha parametri direttori $(0,-3,0)$, allora il problema si risolve ottenendo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a+3b-c=0 \\ -3b=0 \end{cases}.$$