Dipartimento di Ing. Civile Ambientale

Prova Scritta di GEOMETRIA del 15.01.2018

———————————————————————————————

1. Siano

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,-1,2),(0,0,-1)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(1,-1),(2,0)\}$$

basi di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$, rispettivamente. Determinare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare il nucleo di L.

Per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (x-y)(0,-1,2) + (3x+2y-z)(0,0,-1),$$

cioè

$$(x,y,z)_{\mathcal{B}} = (x, x-y, 3x+2y-z).$$

Allora, da

$$L(x,y,z)_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L)(x,y,z)_{\mathcal{B}},$$

si ottiene

$$L(x,y,z)_{\mathcal{B}'} = (5x+2y-z, 3x+3y-z),$$

quindi

$$L(x,y,z) = (5x+2y-z)(1,-1) + (3x+3y-z)(2,0) = \dots$$

...

2. Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} (2k+1)x + (k+1)y + 3kz = k \\ (2k-1)x + (k-2)y + (2k-1)z = k+1 \\ 3kx + 2ky + (4k-1)z = 1 \end{cases}$$

essendo k un parametro reale.

La matrice dei coefficienti del sistema ha determinante che vale $(k-1)^2(k+1)$. Allora per tutti valori di k diversi da ± 1 il,si9stema è di Cramer ed ammette un'unica soluzione che si calcola ...
Per $k = 1$ matrice dei coefficienti e matrice completa hanno entrambe rango 2. Il sistema ammette soluzioni che si ottengono $\cdots$
Per $k = -1$ la matrice matrice completa ha rango 3, quindi il sistema non è risolubile.

3. Determinare il piano contenente il punto $P(1, -3, -2)$ ortogonale al piano $\pi : x + 3y - z - 5 = 0$ e parallelo alla retta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z - 2 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Il generico piano per P ha equazione

$$a(x - 1) + b(y + 3) + c(z + 2) = 0.$$

La condizione di ortogonalità col piano $\pi(1, 3, -1)$ e quella di parallelismo con la retta $r(3, 1, -1)$ portano al sistema

$$\begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ 3a + b - c = 0 \end{cases} \qquad \ldots$$

4. Determinare eventuali iperboli equilatere aventi per asintoto la retta $r : 2x-y+1 = 0$ e tangenti alla retta $s : 3x-2y+2 = 0$ nel punto $P(-\frac{4}{3}, -1)$.

Si può considerare il fascio di coniche bitangenti alla retta r nel suo punto improprio $R_\infty(1, 2, 0)$ ed alla retta s in P. Le coniche degeneri sono:
- quella spezzata nelle rette r ed s,
- quella costituita dalla retta PR_∞, contata due volte.

Il quinto punto che determina l'iperbole cercata è il punto $Q_\infty(2, -1, 0)$, che indica la direzione ortogonale a R_∞.
