Prova Scritta di GEOMETRIA del 13 Dicembre 2005
Soluzioni Proposte

1. Sia $L : R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare rappresentata dalla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avendo indicato con C la base canonica di R^3 e con B la seguente base di R^4

$$B = \{(1,0,0,2),(0,2,3,1),(0,0,2,1),(1,0,1,0)\}.$$

Determinare una base di ImL.

Si ha

$$L(x,y,z)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+2z, 2x+4z, y, x+z).$$

L'applicazione e' allora definita come segue

$$L(x,y,z) = (x+2z)(1,0,0,2)+(2x+4z)(0,2,3,1)+y(0,0,2,1)+(x+z)(1,0,1,0) =$$

$$= (2x+3z, 4x+8z, 7x+2y+13z, 4x+y+8z).$$

Allora $ImL = <(2,4,7,4),(0,0,2,1),(3,8,13,8)>$. Poiche' i tre vettori generatori sono linearmente indipendenti, essi costituiscono una base e quindi dim $ImL = 3$.

2. Stabilire per quali valori reali di k il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + y - 3z = 1 \\ (k-1)x - y + (k+2)z = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed eventualmente determinarle .

La matrice dei coefficienti del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ k-1 & -1 & k+2 \end{pmatrix}$$

ed ha determinante nullo per $k = 2$. Allora, per tutti i valori reali di k, tranne $k = 2$, il sistema e' di Kramer ed ammette un'unica soluzione che si calcola nel solito modo. Nel caso $k = 2$ la matrice completa ha rango 3, dato dal minore

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

pertanto il sistema corrispondente non ammette soluzioni.

3. Si scriva un'equazione omogenea per la parabola passante per i punti $P(1,2,1)$, $Q(0,1,0)$, e tangente nel punto $R(3,1,1)$ alla retta $r : 2x - y - 5 = 0$.

La parabola cercata appartiene al fascio di coniche (tutte parabole) bitangenti alla retta impropria nel punto $Q(0,1,0)$ ed alla retta r di equazione $2X - Y - 5T = 0$ nel punto $R(3,1,1)$. Le coniche degeneri del fascio sono quindi, una costituita dalla retta impropria e dalla retta r, l'altra dalla retta per Q ed R, contata due volte. L'equazione del fascio e' allora

$$(2X - Y - 5T)T + k(X - 3T)^2 = 0.$$

Il passaggio per l'ulteriore punto $P(1,2,1)$ fornisce $k = \frac{5}{4}$.

4. Scrivere equazioni parametriche della retta passante per il punto $P(1,0,2)$, parallela al piano yz e al piano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$.

La retta cercata si ottiene come intersezione del piano per P parallelo al piano yz ed del piano per P parallelo al piano di equazione $2x-y+2z+1 = 0$. Il due piani hanno equazioni rispettive $x-1 = 0$ e $2x-y+2z-6 = 0$. Pertanto la retta si rappresenta con equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

e ponendo, ad es., $z = t$, si ottengono equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2t - 4 \\ z = t \end{cases}$$

L.S.