FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA ING. CIVILE

APPELLO DI GEOMETRIA DEL 13.06.2013

SOLUZIONI PROPOSTE

---

**1.** Considerata l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

- $L(e_1) = f_1 + f_2$,
- $L(e_2) = f_1 - f_2 + f_3$,
- $L(e_3) = f_2$,
- $L(e_4) = f_1 + f_3$,

ove $e_i$ ed $f_i$ sono i vettori delle rispettive basi canoniche, determinarne nucleo ed immagine di $L$. Determinare poi la controimmagine del vettore $(2, 1, -3)$.

---

Si ha

$$L(x, y, z, t) = x(f_1+f_2)+y(f_1-f_2+f_3)+zf_2+t(f_1+f_3) = (x+y+t, x-y+z, y+t)$$

allora il nucleo di $L$ ha dimensione 1 ed è generato da una soluzione non nulla del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

Per la formula di Grassman l'immagine di $L$ deve avere dimensione 3. Si ha:

$$Im(L) = \{(x + y + t, x - y + z, y + t) : x, y, z, t \in \mathbb{R}\} =$$

$$< (1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1) >=$$

$$< (1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, 0) > .$$

Per l'ultima richiesta basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y+t=2 \\ x-y+z=1 \\ y+t=-3 \end{cases}$$

---

**2.** Date le rette di equazioni parametriche

$$a: \begin{cases} x=-t+2 \\ y=5t-3 \\ z=t-2 \end{cases} \qquad b: \begin{cases} x=3s-6 \\ y=s-1 \\ z=s+1 \end{cases},$$

verificare che sono sghembe e calcolare la loro minima distanza.

---

Dopo aver verificato che le rette sono sghembe, si considerino i punti

$$A(-t+2, 5t-3, t-2) \in a \quad e \quad B(3s-6, s-1, s+1) \in b.$$

$AB$ è il segmento di minima distanza tra le due rette se è ortogonale ad entrambe: si ottiene per $t=1$ ed $s=2$ La minima distanza tra due rette coincide allora con il modulo del vettore $AB$: $3\sqrt{2}$.

**3.** Nel fascio di coniche tangenti in $A(0,1)$ all'asse delle ordinate e passanti per $B(1,-2)$, determinare e classificare quelle tangenti alla circonferenza $\mathcal{C}: x^2+y^2-4y+2=0$ nel punto $C(1,1)$.

---

La tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $C$ è la retta $r: x-y=0$. Basta allora costruire il fascio di coniche bitangenti all'asse $y$ in $A$ e ad $r$ in $C$. Imponendo il passaggio per $B$ si ottiene un'unica conica, che è evidentemente una iperbole.

---