Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 06.04.2018 -

---

1. Considerata l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita

$$L(x, y, z) = (x + y + 3z, x + 2y + 5z, -x - 3y - 7z),$$

determinare $L^2 = L \circ L$ e provare che essa non è invertibile. Determinare inoltre i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $L^2(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

Si ha

$$L^2(x, y, z) = L(x + y + 3z, x + 2y + 5z, -x - 3y - 7z) =$$
$$= (-x - 6y - 13z, -2x - 10y - 22z, 3x + 14y + 31z).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x - 6y - 13z = 0 \\ -2x - 10y - 22z = 0 \\ 3x + 14y + 31z = 0 \end{cases}$$

si trova che $Ker\ L^2 =< (-1, -2, 1) >$, pertanto l'applicazione non è invertibile.
Per determinare i vettori di $\mathbb{R}^3$ tali che $L^2(x, y, z) = (1, 1, 0)$ basta risolvere l'analogo sistema

$$\begin{cases} -x - 6y - 13z = 1 \\ -2x - 10y - 22z = 1 \\ 3x + 14y + 31z = 0 \end{cases}$$

2. Sia r la retta per il punto $P(1, 0, 2)$ e direzione fornita dal vettore $v = e_1 - e_2 + e_3$. Provare che tale retta è complanare con la retta

$$t : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad .$$

Determinare il piano ad esse comune.

L'equazione della retta r in forma di rapporti uguali è

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-2}{1},$$

quindi

$$r : \begin{cases} x = z-2 \\ y = -z+2 \end{cases}.$$

Dopo aver verificato che le due rette sono complanari con la condizione sulla matrice 4×4 dei coefficienti, basta considerare il fascio di piani per la retta t e tra quesi determinare quello contenente il punto P.

3. Determinare, se esiste, l'iperbole equilatera tangente alla circonferenza

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$$

nel suo punto $P(1,1)$, avente asintoto la retta $r : 2x + 2y - 3 = 0$ e passante per il punto $Q(-3,1)$.

L'iperbole cercata contiene il punto improprio della retta r, cioè $R_\infty(1,-1,0)$, Dovendo poi essere equilatera, dovrà anche contenere il punto $S_\infty(1,1,0)$ che indica la direzione ortogonale a quella di R_∞. Detta t la tangente a $\mathcal{C}$ nel punto P si può costruire il fascio di coniche tangenti le cui coniche degeneri sono una costituita dalla retta t e dalla retta impropria, l'altra dalle rette (PR_∞) e (PS_∞). Il passaggio per Q risolve infine il parametro.