Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 01.09.2014

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$L(x, y, z) = (x + ky + z, x + kz, x - y),\ \ k \in \mathbb{R}.$$

Determinare per quali valori di k l'applicazione è invertibile e, nel caso individuarne l'inversa. Negli altri casi determinare il nucleo di L.

L'applicazione è invertibile se e solo se la sua matrice (rispetto a basi comunque scelte) è invertibile. Sia C la base canonica, si ha

$$M_C^C(L) = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante $k^2 + k - 1$ vale 0 per $k = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Allora per tutti i valori di k diversi da questi l'applicazione è invertibile e la sua inversa si otterrà dalla risoluzione del sistema di Cramer

$$\begin{cases} a + kb + c = x \\ a + kc = y \\ a - b = z \end{cases}.$$

Per $k = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ la matrice sopra ha rango 2 ed il nucleo dell'applicazione data è pari allo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ x - y = 0 \end{cases},$$

pertanto ha dimensione 1: $Ker\ L =< (-k, -k, 1) >$.

2. Considerate le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} y = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases},$$

verificare che esse sono sghembe e determinarne la minima distanza.

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo, pertanto le rette date sono effettivamente sghembe. Punti generici delle rette date sono

$$P(\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}, 1) \in r, \qquad Q(5 - 2l, -2, l) \in s.$$

Si consideri poi la retta per P e Q. Inponendo le condizioni di ortogonalità di tale retta con r ed s, si risolvono i parametri t ed l. La distanza cercata è la lunghezza del segmento PQ.

3. Determinare l'iperbole equilatera avente la retta $r : 2x - y + 3 = 0$ come asintoto e passante per i punti $P(1, 0)$ e $Q(-3, 1)$.

Si costruisce il fascio di coniche tangenti alla retta r nel suo punto improprio $R_\infty(1, 2, 0)$ e passanti per i punti P e Q. Imponendo poi il passaggio per $S_\infty(2, -1, 0)$ si ottiene la soluzione.