[pp. 163-207 di G. Stelli (a cura di),
Percorsi della filosofia del Novecento,
IRRSAE Umbria, Perugia, 2001]

Marco Mamone Capria#

Matematica e fisica fra linguaggio e realtà

> E per finirla in una parola, se tu vuoi le contemplationi purissime l'hai ne le matematiche, poiché l'oggetto loro per se stesso è intellettivo e non materiale, ma se tu cerchi l'opere applicandole a la materia, ne trarrai maraviglie.*
> *B. Baldi* (1553-1617)

1. Introduzione. L'importanza della matematica nella storia del pensiero filosofico è grande solo quanto è esigua la sua presenza nella formazione dei filosofi accademici e degli insegnanti di filosofia - e non solo in Italia. Ciò è paradossale, soprattutto in considerazione del fatto che l'attenzione verso questa disciplina appartiene alla tradizione filosofica fin dai primordi.[1] Sembra che il titolo stesso di 'filosofo' se lo sia attribuito per primo quel pensatore, a metà fra storia e leggenda, che costruì nel VI sec. a. C. un intero sistema sul presupposto che il numero è il vero fondamento della realtà: Pitagora.[2] Non basta. Se c'è un filosofo di cui nessuno nega la preponderante influenza su tutta la storia del pensiero occidentale, questi è Platone; ora uno degli esiti più caratteristici della sua speculazione è quella teoria delle idee che può essere interpretata, in parte, come un tentativo - peraltro ancor oggi dotato di un forte potere di suggestione - di spiegare la natura degli enti e delle verità matematiche. E si potrebbero aggiungere altri nomi di eminenti filosofi, via via fino ai nostri giorni, che hanno avuto preoccupazioni teoriche non secondarie legate, appunto, alla matematica.

Il fatto è che la matematica costituisce da sempre un'*anomalia* nel quadro della conoscenza umana. Da un lato essa non parla di oggetti sensibili: i numeri, per esempio, non possono essere visti o uditi come sedie o campanelli; dall'altro si tratta di uno dei pochi luoghi del sapere specialistico in cui il consenso dei competenti è in larga misura una realtà e non un mito o una millanteria: la matematica è in effetti uno dei due paradigmi tradizionali del sapere certo - l'altro essendo la percezione di semplici qualità sensibili. La matematica ha quindi da sempre offerto il curioso spettacolo di una disciplina che parla di cose remote dalla realtà materiale - anche se variamente connesse con questa, come vedremo -, ma dove al tempo stesso ci si avvicina più che in qualsiasi altra scienza ad enunciare proposizioni intersoggettive *che costringono all'assenso*. Questo è il mistero centrale della conoscenza matematica, e chiunque voglia capire come mai tanti filosofi hanno ritenuto di doversene occupare deve prima di tutto compenetrarsene. Ciò non è difficile, e la maniera più semplice e piacevole è di studiare qualche teoria matematica, anche a un livello elementare. Naturalmente tutti noi abbiamo imparato a scuola un po' di matematica, ma di solito questo tirocinio non riesce - se non a pochissimi - a farne sentire il fascino, e quindi a far sorgere una

---

Dipartimento di Matematica, via Vanvitelli 1, 06123 Perugia.

* Cit. in Nenci 1998, p. 37.

1 Una questione diversa, ma niente affatto trascurabile, è se sia ammissibile fra i matematici e gli scienziati in generale - e soprattutto fra quelli con compiti di insegnamento - un'analoga ignoranza di tutto ciò che non sia la propria specialità.

2 Diogene Laerzio, VIII, 8.

complementare curiosità filosofica al riguardo. Anzi, si può dire che la matematica è una delle poche 'materie scolastiche', se non addirittura l'*unica*, che viene *odiata* da parecchi studenti. Altre materie possono suscitare noia o 'antipatia', ma l'odio è una passione particolare per la quale c'è bisogno di ragioni particolari (ci torneremo fra poco). Anche in questo, sfortunatamente, la matematica è dunque anomala.[3]

Lo scopo di questo saggio è di discutere una serie di questioni sulla natura della matematica e i suoi rapporti con la fisica, cercando di enfatizzarne l'importanza attuale, oltre che storica, per la formazione di una concezione coerente del mondo e della conoscenza che ne abbiamo. Piuttosto che offrire una rassegna di tesi eterogenee, esso dipana (con alcune digressioni) un lungo argomento, il cui 'scheletro' si può trovare esposto nella sezione conclusiva.

Per rendere la lettura accessibile al di là della barriera che purtroppo ancora separa le "due culture", ho evitato di entrare in dettagli eccessivamente tecnici, ma non ho inteso perciò propagare l'illusione che si possa parlare di scienza, sia pure 'filosoficamente', senza fare i conti con il contenuto specifico - per quanto elementare - delle varie discipline. Nelle note - che sono una parte importante del saggio, anche se si possono rimandare a una seconda lettura - sono tra l'altro segnalate diverse opere che potranno essere utili per approfondimenti.

2. Socrate insegna la geometria. Per esplorare quello che ho chiamato il 'mistero centrale' della conoscenza matematica si può far ricorso utilmente a un celebre dialogo di Platone: il *Menone*. Secondo un approccio tipico di altri dialoghi 'socratici', Socrate chiede al suo interlocutore, appunto Menone, che cosa sia la virtù, e alle risposte di costui, che propone esempi di atti virtuosi, replica pretendendo una definizione generale. Ma che cos'è una definizione generale?, potrebbe chiedere Menone, e Socrate lo previene - piuttosto incoerentemente - *fornendo esempi*, che considera convincenti, di definizioni generali: quella di figura, quella di colore.[4] Allora Menone prova a costruire una possibile definizione di 'virtù', ma Socrate demolisce il suo tentativo, mostrandone le pecche. Al tempo stesso Socrate confessa che se mette in difficoltà i suoi interlocutori è perché egli stesso è in difficoltà, il che provoca in Menone la replica che se non sa che cosa sta cercando, la sua ricerca non ha senso. Ma Socrate nega questa conclusione, e paragona la ricerca e l'apprendimento al *ricordare* (per la precisione, ciò di cui abbiamo avuto conoscenza in una vita precedente o "nell'Ade"). In effetti, se stiamo cercando di ricordare qualcosa e qualcuno ci chiede *che cosa* stiamo cercando di ricordare, è ovvio che non possiamo dare una risposta *completa* fin tanto che non siamo *riusciti* a ricordare! Per illustrare la sua teoria della ricerca Socrate, in una delle più famose scene platoniche, convoca allora uno schiavo e comincia ad interrogarlo sotto gli occhi di Menone. Più precisamente gli propone un problema e lo invita a risolverlo; egli dovrà rispondere alle domande che verranno via via poste da Socrate e alla fine, pur non essendo una persona istruita, troverà la soluzione. Ora il punto è che il problema che lo

---

[3] Per esempio, uno studio apparso nel 1956 negli Stati Uniti sosteneva che "la matematica gode del'incerto onore di essere la materia meno popolare della carriera scolastica [...] I futuri insegnanti imparano a detestarla fin dalle prime classi elementari [...] E così essi ritornano alle scuole per insegnare ad una nuova generazione ad odiare la stessa materia " (cit. in Polya 1957, p. 10).

[4] Non so se i commentatori abbiano notato che qui Socrate si permette esattamente ciò che di regola, e in particolare nel caso presente, vieta ai suoi interlocutori: cavarsela per mezzo di esempi. In altre parole, Socrate, al pari di Menone, non dà una definizione - cioè una definizione di 'definizione'!

schiavo deve risolvere è di *geometria*, e precisamente: trovare il lato di un quadrato che abbia area doppia di un quadrato dato.

Questa parte del dialogo platonico è straordinaria per più versi.

1) E' rivelatore che Socrate scelga la matematica come la scienza più adatta a mostrare che "il ricercare e l'imparare sono in generale ricordo (*anàmnesis*)".[5] In termini diversi questa dottrina può esprimersi dicendo che *le verità matematiche sono a priori*. Esse non dipendono da conoscenze acquisite per mezzo dell'esperienza sensibile, anche se questa, ovviamente, può essere d'aiuto per 'ricordarle'. Per esempio, Socrate non avrebbe avuto speranze di successo se avesse interrogato lo schiavo sulle guerre persiane: la storia devono raccontarcela, se si vuole farcela conoscere, e agli schiavi è probabile che nessuno la raccontasse.

2) Questo ci porta al secondo punto: la persona che viene fatta partecipare a questa esibizione di 'metafisica sperimentale' è *uno schiavo*: ciò significa non solo che per Platone uno schiavo è un essere umano nel senso più importante del termine dal suo punto di vista (cioè quello cognitivo), ma anche che la matematica è, per così dire, assolutamente '*democratica*': nessuna distinzione di rango o di ceto ha la minima influenza sulla capacità di impararla, per poco che si offrano stimoli adeguati.[6]

3) Platone mette in evidenza diversi aspetti importanti concernenti la *didattica della matematica*. Non c'è dubbio che l'apprendimento della matematica dev'essere *guidato* ma non *forzato*, e che si deve favorire nel discente un approccio *attivo*: la matematizzazione è un'attività naturale dello spirito umano e un eccesso di pressioni esterne può finire con l'inibirla (esattamente come per altre disposizioni naturali). In secondo luogo è attraverso i problemi, o meglio, i tentativi guidati discretamente di risolverli, che si impara pressoché ogni disciplina, e la matematica in particolare; viceversa la ricetta più sicura per lasciare i propri allievi a metà tra l'intimidazione e la noia è presentare le *soluzioni* (proposizioni, teoremi ecc.) senza aver spiegato i *problemi* che le hanno fatte emergere.[7] Infine gli errori nel processo di apprendimento vanno

---

5 *Menone*, 81d. Vi sono molte edizioni italiane dei dialoghi di Platone, ma vorrei segnalare l'unica completa che offra pure il testo a fronte: quella, apparsa in una collana economica, curata da E. V. Maltese (Roma, Newton Compton 1997, 5 voll.).

6 Questo, naturalmente, non significa negare le difficoltà oggettive della matematica. E' istruttiva, a tale proposito, perché portatrice in forma diversa dello stesso messaggio egualitario, la storia della risposta che Euclide dette al re Tolomeo I (il quale regnò dal 305 al 285 a. C.) quando questi gli chiese se ci fosse una via più breve degli *Elementi* per imparare la geometria: "Non esiste una via regia alla geometria". In altre parole il re, se voleva impararla, avrebbe dovuto studiarla proprio come uno qualsiasi dei suoi sudditi. Una storia analoga è raccontata su Menecmo e Alessandro Magno (Heath 1925, vol. 1, p. 1). Incidentalmente, da ciò sembra potersi ricavare che i grandi matematici nell'antichità avevano fama di uomini orgogliosi anche nei confronti dei potenti.

7 Quando parlo di 'problemi' non vorrei che si intendesse 'esercizi', cioè l'applicazione di procedure standardizzate a casi simili (anzi, per lo più *uguali*, se si prescinde dalla variazione più o meno astuta dei dati numerici). Benché un minimo di abilità nell'esecuzione di algoritmi, che appunto si acquista applicandoli ad un certo numero di esempi, sia ovviamente importante, ritengo che l'enfasi sulla ripetizione meccanica sia *uno dei grandi difetti dell'insegnamento tradizionale della matematica*. Tale enfasi, purtroppo ancor oggi comune a tutti i livelli della scuola, dalle elementari all'università, è dovuta in parte a un fraintendimento della natura della matematica, in parte alla pigrizia di studenti e docenti (per una volta d'accordo fra loro!).

valutati dall'insegnante come eventi fisiologici, in quanto più o meno necessari per arrivare alla verità. (Per esempio, nel caso del problema posto da Socrate, l'idea, che viene spontaneamente allo schiavo, di raddoppiare il lato del quadrato di partenza è sbagliata, ma se la si esplicita - come appunto avviene nel dialogo - ci si rende conto dell'errore e si viene indirizzati nella direzione giusta). Disgraziatamente molti docenti, un po' in tutte le discipline, tendono a diventare intolleranti nei confronti di ogni deviazione degli studenti dalla 'verità': e la matematica è uno dei pochi settori in cui questa intolleranza può sembrare razionalmente giustificata dal fatto che il professore *sa* senz'ombra di dubbio *la verità* (senza virgolette!). Ora, se a uno studente si fa percepire l'errore come colpa o mancanza è facile disgustarlo da quella che altrimenti sarebbe stata per lui un'attività affascinante anche perché ricca di imprevisti. Penso che sia precisamente questo che accade, troppo spesso, nell'insegnamento della matematica.

Ma Socrate riesce veramente ad estrarre dalla mente dello schiavo il sapere matematico nascosto? A un certo punto anche lui è colto da un dubbio e invita Menone a stare in guardia:

> Sta' attento se per caso scopri che io sto insegnando e mostrando a costui, piuttosto che interrogandolo sulle sue opinioni. (84c)

Cioè Socrate ha ben presente il rischio che la sua maniera di porre le domande sia non del tutto neutra, ma fornisca indicazioni che un interlocutore sagace potrebbe sfruttare per dare la risposta 'esatta' (o meglio la risposta che l'esaminatore considera tale). E' questo un fenomeno cui generalmente si presta poca attenzione, ma che rende necessario considerare molti successi scolastici (ad ogni livello) come prova dell'intuito psicologico dello studente più che della sua preparazione. A dire il vero, neanche il 'professor Socrate' sembra salvarsi *totalmente* da questa accusa. In effetti l'obiettivo da raggiungere sarebbe la costruzione di una lista di domande di natura generale, che prescindano cioè dalle peculiarità del problema, e che quindi, in definitiva, il discente potrebbe porsi da sé; in particolare non dovrebbero dipendere dalla circostanza che chi interroga sappia già la risposta. Le domande poste da Socrate sono invece a volte un po' troppo specifiche (invito il lettore a verificare di persona!). Passi importanti verso un approccio meno compiacente all'arte della scoperta, o *euristica*, sono stati compiuti in opere ormai classiche dal matematico ungherese George Polya (1888-1985).[8]

3. La matematica come 'linguaggio' o come ramo della letteratura fantastica. Il sapere matematico ha dunque alcune caratteristiche speciali: gode della massima

---

Quanto alla pigrizia, i primi sono più che contenti di evitare lo sforzo della comprensione dei *concetti* matematici e delle loro articolazioni, e di potersi limitare alle 'regole'; i secondi, da parte loro, si salvano da un sovrappiù di fatica se nella valutazione dei loro studenti possono limitarsi a contare gli errori commessi nell'esecuzione delle suddette procedure. In realtà - e vengo qui al fraintendimento - un merito dell'avvento dei calcolatori elettronici nelle scuole sarà forse - e dovrebbe già essere, ma ancora non è - quello di convincere tutti che il tentativo di imitare una macchina in ciò in cui essa sarà sempre irrimediabilmente migliore di un essere umano *non può essere il fine dell'insegnamento della matematica*, né una buona ragione per impararla. (Per l'approccio all'insegnamento e all'apprendimento della matematica per mezzo della risoluzione di problemi sono riferimenti obbligati Polya 1957 e 1962; una introduzione breve ma efficace è Polya 1967).

[8] Vedi la nota precedente e in particolare, per esempi di interrogazioni più neutre, Polya 1957, pp. 42-5.

certezza; è intersoggettivo; e riguarda enti ideali (qualunque cosa si intenda con ciò). Queste sue proprietà, e un'intenzione 'demistificatoria' nei confronti della terza, hanno suggerito ad alcuni di vederlo come un sapere essenzialmente *linguistico*: la matematica sarebbe *un linguaggio*, anzi, come anche si dice a mo' di compensazione, *il linguaggio della scienza*. La principale difficoltà con questa tesi è che non è affatto chiaro che cosa significhi. C'è un senso abbastanza evidente in cui si può dire che la matematica *ha un suo linguaggio*, e basta aprire un libro di matematica per rendersene conto. Ma in che senso può essere considerata essa stessa un 'linguaggio'? Per capire perché questa proposta è implausibile, basta chiedersi: se la matematica è un 'linguaggio', *di che cosa si può parlare* in tale linguaggio? Di tutto? Si può, per esempio, raccontare 'in matematica' la storia dell'ira di Achille? E se no, perché?

L'idea sottostante la tesi linguistica è che le verità matematiche sono, in ultima analisi, della stessa natura di quella che 'un celibe è un maschio non sposato': cioè, sono *verità di dizionario*. L'innegabile difficoltà della matematica risiederebbe nel grado di complessità delle combinazioni che si possono formare a partire da semplici convenzioni verbali. Questo punto di vista si identifica, nella sua versione estremistica, con il *formalismo*: la matematica altro non sarebbe che un gioco simbolico, cioè una manipolazione di simboli secondo regole fissate convenzionalmente.[9] Ora, però, lo scopo delle definizioni ordinarie, come quella di 'celibe', è la brevità. Ma non ci sarebbe molto utile essere brevi se non esistessero entità a cui la parola così definita si può applicare. Cioè, è utile avere la parola 'celibe' *perché ci sono dei celibi*. Per quale ragione, allora, sarebbe utile avere la parola 'triangolo', se non ci fossero poligoni con tre lati?[10]

Questa obiezione può sembrare facile da controbattere: ci sono molte parole che non si riferiscono ad alcun ente reale; per esempio, possiamo parlare di ippogrifi e centauri, di Posidone e delle Nereidi, dell'ira di Achille e così via. E' chiaro che queste parole sono utili, ma non si riferiscono a enti reali (almeno secondo l'attuale modo di vedere). La matematica, si potrebbe sostenere, a completamento della tesi 'linguistica', è come una fiaba in cui i rapporti tra i personaggi sono retti da definizioni, in cui, cioè, la 'trama' è interamente contenuta in queste.[11] La nozione di Achille, per esempio, non contiene il duello con Ettore e la pietà nei confronti di Priamo: sono eventi fantastici di cui veniamo a conoscenza solo dopo aver letto una certa porzione dell'*Iliade*, e che avrebbero potuto, *senza contraddizione*, non esservi contenuti; più precisamente, Omero avrebbe potuto raccontare la *mancanza di pietà* di Achille senza darci il diritto di

---

[9] Questa dottrina, naturalmente, non è nuova: "Non so se ci sia qualche rapporto fra lo spirito del gioco e il genio matematico; ma ce ne sono molti fra un gioco e la matematica. Lasciando da parte ciò che la sorte mette di incertezza da un lato, o confrontandolo con ciò che l'astrazione mette di inesattezza dall'altro, una partita di un gioco può essere considerata come una sequenza indeterminata di problemi da risolvere secondo condizioni date. Non ci sono questioni di matematica a cui la stessa definizione non possa convenire, e la *cosa* del matematico non ha esistenza in natura più di quella del giocatore. E', da una parte e dall'altra, un affare di convenzioni" (Diderot 1754, III). Si noti che Diderot era molto competente anche come matematico, al punto da riuscire a scrivere un certo numero di articoli tecnici che impiegavano l'allora recente calcolo infinitesimale (una raccolta apparve nel 1748; cfr. Coolidge 1949, pp. 178-85, per una sintesi).

[10] Non è qui possibile entrare in altre difficoltà della posizione formalista, e in particolare in quelle originate dai celebri teoremi di incompletezza di Gödel (1931).

[11] "Non c'è un 4-cubo 'reale' più di quanto ci sia un Topolino 'reale'. Edipo e Topolino esemplificano idee condivise che non rappresentano niente di reale. Essi mostrano che ci può essere rappresentazione senza un rappresentato" (Hersh 1998, p. 20).

accusare lui, l'autore, di contraddizione. Un testo di geometria euclidea, invece, potrebbe sì omettere di menzionare il fatto che le altezze di un triangolo si incontrano in un punto, ma non potrebbe asserire *che non si incontrano* (a meno di dare una definizione di triangolo, o delle sue altezze, diversa da quella usuale). Così i matematici si occuperebbero di enti fantastici un po' come i narratori, ma senza la stessa libertà.[12] La matematica riposerebbe parzialmente, insomma, sulla stessa facoltà di immaginare enti a partire da descrizioni parziali sfruttata dai narratori. 'Immaginare' qui significa non necessariamente 'crearsi immagini', anche se per alcuni matematici questa accezione può essere prevalente, ma concepire situazioni simboliche in cui riusciamo a 'riconoscere' gli enti di cui si pretende di parlare.

Questa concezione della matematica (la matematica come costruzione fantastica organizzata deduttivamente), pur rappresentando correttamente alcuni aspetti del processo di *ideazione* e *verifica* delle sue proposizioni, è insoddisfacente per diversi motivi.

La lacuna più grave è che essa non distingue fra la geometria euclidea e, poniamo, la mitologia greca. E' vero che la mitologia greca presenta, nel passaggio da un autore antico ad un altro, delle incoerenze, ma non sarebbe troppo difficile istituire alberi genealogici non contraddittori e dare di ogni personaggio una 'definizione' da cui seguissero tutte le storie di cui può far parte (in una certa misura è quanto si sforzano di fare, a posteriori, i compilatori moderni di dizionari di mitologia greca). Qual è allora lo specifico della matematica? La narrativa, per quanto fantastica, si occupa di enti possibili assimilabili per qualche aspetto, considerato interessante dall'autore e - come spera - dai suoi lettori, ad enti reali. Di che si occupa invece il matematico? Diamo una lista di esempi molto generali: insiemi, strutture, numeri, forme geometriche... Che cosa hanno in comune i *numeri*, per esempio, con gli enti ordinari? In che senso si possono considerare 'varianti' curiose ed istruttive di oggetti di comune esperienza - o almeno di oggetti che ci sono familiari in settori estranei alla matematica? Questo è un fatto chiave: ciò che conosciamo attraverso la matematica *lo conosciamo solo attraverso la matematica*. Con questo, ovviamente, non voglio negare che la conoscenza matematica nasca *a partire* dall'esperienza comune (come vedremo nella sezione successiva), e meno ancora che il solo tipo riconoscibile di conoscenza matematica sia quello altamente formalizzato dei trattati specialistici.[13]

Queste considerazioni conducono a una concezione alternativa: la matematica si occupa di una classe speciale di concetti *universali*. Per esempio, essa non si occupa dei dodici apostoli o dei dodici mesi dell'anno, ma sicuramente si occupa del numero *dodici*. Tuttavia che cosa distingue concetti come 'dodici' e 'apostolo'? Perché la matematica parla del primo ma non del secondo? E inoltre: è sì vero che la proprietà di essere una dozzina può essere attribuita a diversi insiemi di cose di esperienza ordinaria, ma sicuramente in matematica si studiano anche proprietà che vanno ben oltre quelle che trovano applicazione nella vita quotidiana. Per esempio, i *numeri naturali* (cioè 1,2,3,...), benché 'naturali', sono *infiniti*, e quanto meno questa proprietà non è stata 'astratta' da collezioni di oggetti familiari in altri contesti. Inoltre una gran parte della matematica ha studiato e studia, da vari punti di vista, le proprietà del *continuo* (continui sono la retta, il piano, lo spazio euclidei, e anche una circonferenza, o la traiettoria di un punto materiale ecc.), e questo ha infiniti punti anche se ridotto a un semplice segmento

---

12 Del resto anche un narratore è tenuto a un certo grado di coerenza, per quanto variabile secondo il genere dell'opera e lo stile più o meno 'realistico' adottato.

13 Vedi a tale proposito l'interessante rassegna Sizer 1991.

di retta.[14] Poiché uno degli scopi delle teorie assiomatiche degli insiemi sorte a partire dall'inizio del secolo (per primo ne propose una Ernst Zermelo nel 1908) è di ricostruire 'insiemisticamente' il continuo, in esse si trova sempre un 'assioma dell'infinito', il quale afferma l'esistenza di almeno un insieme infinito.

Possiamo quindi dire che la concezione 'linguistica' della matematica si concentra eccessivamente sulla *dimostrazione* delle proposizioni matematiche, e non dà abbastanza rilievo al momento *costitutivo* vero e proprio, che è quello degli *assiomi* e delle *definizioni*. Questo, peraltro, è un difetto comune alle tre scuole fondazionali sorte nel primo Novecento (il logicismo, il formalismo e l'intuizionismo): la scarsa attenzione rivolta alla *formazione dei concetti matematici*, e l'enfasi esclusiva sul momento 'fondativo' della verità degli asserti matematici. Così è vero che le proprietà dei triangoli euclidei devono potersi ricavare deduttivamente dagli assiomi della geometria euclidea, ma perché si sono scelti quegli assiomi e non altri? Che ragioni ci sono per pensare che questo sistema deduttivo non debba essere un giorno integrato con altri assiomi? E perché sono state individuate come degne di studio certe configurazioni di punti e non altre? E' chiaro che qui neanche l'analogia più o meno esile con la letteratura fantastica ci porta lontano. Se vogliamo tentare di rispondere a queste domande dobbiamo riferirci alle origini storiche della matematica, per quanto semplificate e congetturali.

4. Le origini e l'autonomia della matematica. In effetti è chiaro che l'evoluzione della conoscenza matematica ha preso le mosse da nozioni aritmetiche e geometriche intuitive, le quali servivano (e servono) a descrivere aspetti dell'esperienza ordinaria della quantità e della forma, ma poi si è distaccata sempre più dalle sue origini nel tentativo di organizzare deduttivamente i legami fra tali nozioni; a tale scopo, di queste sono state elaborate nel corso di secoli definizioni che solo in parte rispecchiano l'uso intuitivo, ma che d'altro canto si prestano a *stabilire* in grande generalità (e non solo a *constatare* in casi particolari) quei legami.

Che un triangolo formato da tre fili tesi fra tre paletti conficcati a terra, abbia come somma degli angoli interni qualcosa che equivale approssimativamente a due angoli retti - questa è una genuina scoperta empirica. E' a partire da scoperte come questa che generazioni di agrimensori e architetti avranno riunito il corpo di conoscenze alla base del proprio mestiere, probabilmente notando via via che esse possono essere più facilmente studiate sulla base di modelli in scala ridotta: per esempio, triangoli disegnati. L'indipendenza di molte proprietà dalle *dimensioni* della forma studiata, per es. il triangolo, è stata una grande scoperta sperimentale - resa possibile dal carattere sostanzialmente euclideo di questa protogeometria fisica -, che si è accompagnata alla comprensione di altri tipi di indipendenza dalla forma: per es., l'affermazione sopra riportata sugli angoli interni di un triangolo non dipende dalla disposizione dei paletti. Ciò avrà condotto a cercare di isolare le caratteristiche comuni a tutte le situazioni in cui le stesse proprietà vengono verificate, a individuare, cioè, che cosa hanno in comune

---

14 Anzi, dopo Georg Cantor (1845-1918), fondatore della teoria degli insiemi e dei numeri cardinali infiniti, è sensato e corretto affermare che il 'numero' dei punti di un segmento è *maggiore* del 'numero' dei numeri naturali, benché infiniti entrambi. Quanto alla necessità dell'infinito in matematica, già Pascal osservava (nell'opuscolo *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, datato intorno al 1658, dove si trovano diverse anticipazioni della teoria moderna dell'infinito matematico): "Non c'è geometra che non creda lo spazio divisibile all'infinito. Non si può esserlo senza questo principio più di quanto si possa essere uomo senz'anima" (Chevalier 1954, p. 586). (Per completezza è bene aggiungere che l'infinita divisibilità non basta a *caratterizzare* il continuo).

una disposizione di paletti e un disegno che la rappresenta, nonostante l'evidente e radicale diversità delle due cose in termini materiali. La capacità di percepire la forma in quanto 'unità' e la comprensione che molte proprietà dei corpi non solo *dipendono soltanto dalla forma*, ma che, anzi, questa può essere fatta variare notevolmente lasciandole ancora valide: tali sono i presupposti del sorgere della geometria come scienza delle forme astratte, spogliate della veste materiale in cui dapprima ci si rivelano.

Analogamente, per l'aritmetica il fatto decisivo è che molte informazioni importanti si possono ricavare dalla semplice descrizione quantitativa di qualcosa. Di nuovo, non si tratta di un'ipotesi arbitraria o di comodo, ma di un fatto empirico, dipendente dall'esistenza di molti tipi di enti che si presentano in esemplari i quali sono, per vari scopi, assimilabili, nonostante le molte e chiaramente percepibili differenze. Per esempio, per chi doveva costruire una nave, il numero delle persone che avrebbero dovuto esservi trasportate sarà stato un elemento ben più importante da conoscere che non la loro città di origine. E il numero dei giorni trascorsi a partire dalla semina sarà stato presto riconosciuto come un fattore più importante per programmare la raccolta che non i nomi dei seminatori. Più in generale il tempo ha fornito un esempio di entità che per molti scopi si poteva considerare 'puramente' quantitativa (anche se per altri, ovviamente, no): il tempo di cottura di qualcosa, il tempo fra due lune piene successive, il tempo richiesto per effettuare un lavoro, il tempo necessario per portare a termine una gravidanza, ecc.[15]

In breve: *la conoscenza matematica prese le sue origini dal riconoscimento dell'importanza degli aspetti formali e quantitativi in numerose situazioni pratiche e dalla scoperta della possibilità di organizzare argomentativamente questa conoscenza.*

Tuttavia non ci si fermò qui, e si concepì via via un mondo di oggetti ideali caratterizzati da un'autonomia crescente rispetto ai concetti da cui si era partiti. Alcuni ritengono che ciò metta in luce il carattere 'artificiale' degli oggetti matematici, e ne concludono che questi non sono vere entità: ma, quanto a questo, anche tavoli e sedie vengono costruiti e non trovati bell'e fatti, senza che ciò induca nessuno a dubitare della loro esistenza. Inoltre, una volta costruiti, gli oggetti - sia quelli matematici che quelli d'uso ordinario - hanno proprietà largamente indipendenti dalla volontà di chi li ha fabbricati: queste proprietà devono essere *scoperte*, l'essere 1411 un numero primo o no proprio come la capacità di una certa sedia di sopportare un carico di tre quintali o no.

Per la verità non tutti l'hanno sempre pensata così. Per esempio, nel 1897 lo stato dell'Indiana approvò un decreto "che introduce una nuova verità matematica", e precisamente che "l'area di un cerchio sta al quadrato della quarta parte della circonferenza come l'area di un rettangolo equilatero [cioè un quadrato] sta al quadrato di un suo lato".[16] Il lettore può divertirsi a dimostrare che questo ingenuamente contorto decreto equivale all'affermazione che il rapporto fra la circonferenza e il diametro, cioè π, è uguale a quattro! Un'identificazione che semplificherebbe *enormemente* i calcoli, come ognuno può capire - solo che non è vera, e nessuna decisione politica può renderla tale.

C'è chi è d'accordo su questo punto, ma nega che le verità matematiche siano indipendenti dalla capacità umana di conoscerle. Così per costoro un'affermazione

[15] Di un altro aspetto, l'importanza dei rituali religiosi nello sviluppo della geometria, tratta Waerden 1983, al cui affascinante primo capitolo (pp. 1-35) rinvio per una discussione dei legami fra il cosiddetto teorema di Pitagora (che si congettura fosse noto già 4000 anni fa), la costruzione di altari e la predizione di eclissi di Luna.

[16] Klotz 1995, p. 46.

matematica non è vera o falsa a meno che non si abbia una procedura effettivamente eseguibile per determinare se lo è; il "tertium non datur" della logica classica, che è indifferente alle possibilità di accertamento da parte di esseri umani, andrebbe quindi respinto. Così gli *intuizionisti*, come gli olandesi L. E. J. Brouwer e A. Heyting, sostenevano che l'affermazione 'nell'espansione decimale di π compare la sequenza di cifre 0123456789' non era né vera né falsa, in quanto non ancora nota per vera e, d'altra parte, impossibile da confutare mediante una procedura finitamente eseguibile. Ora, però, recentemente (fra luglio e agosto del 1997) programmi di calcolo operanti su calcolatori superveloci hanno scoperto che la suddetta sequenza effettivamente compare, per giunta almeno sei volte, e che la prima occorrenza comincia niente meno che alla 17.387.594.880ma cifra decimale.[17] Quale interpretazione di questa scoperta può dare l'intuizionista? Che quell'affermazione è *diventata vera* quando il calcolatore ha stampato per la prima volta la sequenza ma che fino ad allora non era né vera né falsa. La matematica sarebbe una specie di cronaca delle operazioni mentali (di un certo tipo) *storicamente* eseguite (anche solo da una macchina elettronica?). A me questa sembra una forma di verificazionismo estrema, che tende a sconfinare nel solipsismo (l'idea - se vera - che solo *io*, l'autore di questo saggio, esisto), e che, negando realtà al 'meramente potenziale', è a fortissimo rischio di incoerenza.[18] Essa andrebbe accostata al punto di vista di coloro i quali ritengono che un bicchiere di cristallo è 'diventato fragile' solo quando si è rotto o che la Luna esiste solo quando qualcuno la guarda.

A mio parere i sistemi matematici trattano di concetti che non si possono identificare né con fantasie soggettive né con convenzioni sociali, anche se le dimensioni soggettiva e sociale sono senza dubbio rilevanti quando si vuole caratterizzare l'attività del matematico. Che quei concetti emergano alla consapevolezza umana attraverso l'interazione dell'uomo con il mondo fisico e con i suoi simili è indiscutibile, come lo è il fatto che la conoscenza matematica è stata faticosamente costruita ed elaborata nel corso di millenni. Ma ne segue che gli oggetti di questa sono stati *creati* dall'uomo? Questa domanda è in realtà piuttosto strana, in quanto lascia aperta la possibilità di un'*esistenza nel tempo* di oggetti come, per esempio, le frazioni. Per di più, se noi non siamo disposti ad accettare che le proprietà del mondo fisico siano 'create' dal fatto che alcuni esseri umani le abbiano individuate, dobbiamo tener ben presente che molte di esse sono espresse per mezzo di relazioni matematiche. Se la prima legge di Keplero, secondo cui l'orbita dei pianeti del sistema solare è ellittica, era valida anche prima che l'uomo apparisse sulla Terra, si può ammettere che, invece, le ellissi sono state create dal matematico che per primo le studiò?

La 'naturale' riluttanza ad accettare la tesi della realtà degli enti matematici dipende, secondo me, dal vincolo che sulla parola 'reale' esercitano le 'cose' ordinarie. Ma se si ammette che sono per noi reali le entità di cui parla una teoria che accettiamo, e che sono reali *precisamente nel senso in cui ne parla la teoria*, l'aria di paradosso scompare.[19] Può essere allora vero sia che la radice quadrata di 2 è atemporale, sia che essa è stata scoperta in un certo momento storico (e analogamente per quanto riguarda la collocazione spaziale). Il mondo è pieno di cose di ogni genere, e la parsimonia ontologica - proprio come la parsimonia in generale - va argomentata caso per caso, non è un valore filosofico che goda di supremazia su tutti gli altri.

---

17 Borwein 1998.

18 Per esempio, una volta *eseguita*, una verifica esiste solo come memoria che si *può* recuperare.

19 Per un mio sviluppo di questa tesi vedi Mamone Capria 1998.

Nel complesso non credo, inoltre, che l'enfasi sulla creazione, piuttosto che sulla *scoperta*, ci faccia avvicinare maggiormente alla comprensione di quello che ho chiamato il 'mistero centrale' della matematica (§1), visto che la matematica ha una capacità di valere attraverso il tempo e le culture di gran lunga superiore a quella di qualsiasi altra istituzione umana. Se di istituzione si tratta, essa è molto diversa dalla maggioranza delle altre istituzioni, in quanto non conosce distinzioni di classe, fino al punto che uno schiavo greco e il re d'Egitto si trovano, al suo cospetto, sullo stesso piano (§2). Peraltro, chi ritenesse di poter evitare compromessi con il 'platonismo matematico' sottolineando il carattere di 'gioco sociale' della matematica, sarebbe vittima di un'illusione: infatti le *regole* di un gioco non possono essere 'appiattite' sulle mosse effettivamente compiute dai giocatori (i quali possono *sbagliare* nell'applicarle): ma se si accetta ciò, ci si trova a postulare per le regole una realtà indipendente dai giocatori, e *le regole sono oggetti ideali proprio come i numeri e le altre entità matematiche*.[20]

5. L'utilità della matematica. Abbiamo più volte accennato al rapporto tra matematica e conoscenza della natura. Che la matematica abbia un rapporto peculiare con il mondo è noto da sempre. Da un lato c'è la sua apparente distanza dalla concretezza, dall'altro la sconcertante capacità di infiltrarsi nelle attività apparentemente più 'pratiche'. Il primo di questi due aspetti ha fatto da sempre della matematica una scienza 'di un altro mondo', capace cioè di assorbire chi la coltiva in un mondo eterno e posto al di là delle vicissitudini della materia. E' per questo, principalmente,[21] che nella *Repubblica* (libro VII)[22] Platone ne raccomanda lo studio ai futuri governanti; e, com'è noto, l'attenzione verso ciò che è immutabile, contrapposto a ciò che diviene, che è generato e si corrompe, è uno dei tratti fondamentali della filosofia platonica e, direi, del platonismo nella sua accezione più larga. La stessa tesi, che cioè la matematica fornisca un appagamento spirituale che non richiede ulteriori compensi, è la sostanza di un famoso aneddoto riguardante Euclide: il quale, avendogli uno studente chiesto che cosa si guadagnasse ad imparare la geometria, si sarebbe rivolto a un servitore comandandogli di dare a quello studente un obolo, visto che costui era una persona che aveva bisogno di guadagnare qualcosa da ciò che imparava.[23] Non sappiamo che cosa quello studente

---

20 Per una interpretazione della matematica come sistema di convenzioni sociali vedi il già citato Hersh 1998; Karl Popper, con il suo "mondo 3", ha formulato una posizione di compromesso (cfr. Popper 1972, pp. 158-61). La seguente citazione - tratta da uno dei più bei libri, a mio avviso, mai scritti da un pensatore su un altro pensatore - esprime un punto di vista in pieno accordo con quanto qui sostenuto: "Un suggerimento è di riconoscere questa oggettività [cioè "un concetto di verità per cui vale la legge del terzo escluso: per ogni proposizione, o essa è vera, o lo è la sua negazione"], ma lasciare aperto se e in che senso ci sono oggetti matematici. [Tuttavia] Secondo G, data l'oggettività, ci devono essere oggetti (matematici). E' in effetti difficile immaginare come possiamo pensare oggettivamente senza pensare a qualcosa" (Wang 1987, p. 188; "G" è Kurt Gödel (1906-78), il grande logico).

21 Ma anche, ahimè, per la sua utilità nell'arte della guerra. Qualunque cosa si pensi delle intenzioni politiche di Platone, il ruolo dei filosofi e degli intellettuali in genere nella difesa delle decisioni dei potenti di turno - in particolare in materia bellica - andrebbe studiato attentamente, anche per la sua (purtroppo) grande attualità. (Scrivo queste parole nell'aprile del 1999).

22 Il libro VII della *Repubblica* è quello che si apre con la similitudine dei prigionieri nella caverna, forse il più caratteristico e suggestivo dei "miti" platonici.

23 L'aneddoto è riportato da Stobeo, un antologista del V sec. d. C. (cfr. Waerden 1975, p. 196).

decise di fare, dopo aver ricevuto un tale schiaffo morale. Tuttavia, nel corso dei secoli e fino ai giorni nostri, si può ragionevolmente supporre che lo sdegno euclideo non abbia trovato di solito orecchi ben disposti: per ragioni in parte collegate agli errori pedagogici di cui abbiamo detto sopra (§2), la bellezza della matematica e l'appagamento spirituale che ne consegue sembrano essere rimasti riservati a un gruppo così ristretto di persone, che di solito i difensori del prestigio della matematica presso un pubblico più vasto si sono messi in cerca di argomenti meno 'elevati'.

Un esempio di tale difesa della matematica - e anche una conferma che doveva essercene bisogno - si trova nella prefazione di Federico Commandino (1509-1575) alla traduzione italiana (1575) degli *Elementi* di Euclide da lui diretta:[24]

> [...] vediamo di grazia se è vero, che le matematiche non vagliono punto, né arrechino aiuto alcuno all'uso del vivere humano; come il cieco e vergognoso desiderio del guadagno fece già dire falsamente a certi: i quali hanno fatto che gli studiosi di questa facoltà siano da ignoranti, e da quelli che hanno altro studio alle mani, pubblicamente beffati, come genti che in cosa vana e di niun momento perdano il tempo e la fatica. Poiché dunque trattiamo con huomini che non sono mossi se non dalle ragioni dell'utile, contentiamoci di non vederla così sottilmente; e non ci dispiaccia di dare cotal macchia a sì liberale e nobile Disciplina, accioché questi ancora sentendosi promettere guadagno e ricchezze s'inducano allo studio e all'amore di lei.

Dopo questa eloquente invettiva nei confronti della moltitudine avida di guadagno e non di sapere, incapace quindi di apprezzare la matematica per se stessa,[25] Commandino prosegue elencando i benefici pratici che derivano da "sì liberale e nobile Disciplina":

> Neghino prima costoro, se possono, che l'arti matematiche non rechino aiuto a' negotij popolari. Dicano se le mercantie, alle quali attendono tanti per lo grandissimo guadagno che se ne trahe, si possono maneggiare senza l'Aritmetica. Provino poi di misurare ciò che si voglia, senza l'aiuto della Geodesia: solchino i mari: vadano in paesi lontani: cerchino nuovi mondi, e non si servano dell'Astrologia marinaresca. Che diremo del medico? quanto al giuditio di solo Hippocrate è egli obligato all'Astrologia? colla guida di cui conosce i corsi delle stelle, e particolarmente della Luna: onde dipende tutta la ragione de' giorni, che si chiamano Critici. Con quanta diligenza bisogna egli mirare di non travagliar gl'infermi con alcun grave modo di medicamento, e massimamente nel principio della infermità, mentre la Luna dalla Combustione, come hoggi si dice, se ne camina all'opposizione? Quante utilità reca alfine a gli usi pubblici e privati la Geometria, l'Aritmetica, e tutte l'altre insieme? avenga che niuna dell'arti più basse possa al fine suo condursi senza l'aiuto delle Matematiche.

Questa illustrazione delle applicazioni pratiche della matematica è piuttosto istruttiva, e vale la pena soffermarsi su due degli esempi fatti.[26]

---

24 Questo brano è citato in Micheli 1980, p. 223. (Ho leggermente modernizzato la punteggiatura). Commandino aveva pubblicato nel 1572 la sua traduzione in latino della stessa opera.

25 Lo stesso Platone, pur non trovando niente di male (cfr. nota 21) a indicare l'arte della guerra come una delle due ragioni per insegnare ai suoi governanti aritmetica e geometria (l'altra essendo "la conversione dell'anima dal divenire alla verità e all'essenza"), si scandalizza all'idea che esse siano imparate "per vendere e comprare come i mercanti e i negozianti" (*Repubblica*, VII, 525c).

(a) *Arte della mercatura*. L'uso dell'aritmetica nell'arte della mercatura è una delle applicazioni più 'ovvie'. Nei "libri d'abaco"[27] in volgare, i primi dei quali appaiono alla fine del Duecento, ma che si moltiplicano nel Trecento e nel Quattrocento, si trovano esposti i seguenti argomenti: il sistema di numerazione indoarabo, le quattro operazioni (con diversi metodi per effettuarle), una scelta di problemi aritmetici (talvolta anche geometrici) con relative soluzioni, coinvolgenti equazioni di primo o secondo grado. I problemi erano esposti in forma concreta, le soluzioni venivano date verbalmente, e con un uso minimo di simboli matematici, e dagli esempi il lettore doveva ricavarsi le regole, che non erano esplicitate in tutta generalità. Insomma, il contenuto di questi libri era poco più di quello che oggi ci si propone di far imparare alla scuola elementare, e la forma era coerente con questo livello. (Ai babilonesi queste nozioni erano state familiari fin dal XVII sec. a. C.). Tuttavia gli autori di questi libri si proponevano di offrire al mercante non solo le tecniche indispensabili di base, ma anche l'opportunità di qualche virtuosismo che lo avrebbe fatto ben figurare di fronte ai colleghi. Per esempio si consideri il problema seguente, tratto dal *Libro d'Albaco* (sic) che il "maestro d'abaco" senese Dionigi Gori pubblicò nel 1544:

Un tale compra 10 dozzine di berrette fra verdi e rosse, e più verdi che rosse, e trova che moltiplicato il numero delle dozzine rosse per quello delle verdi si ottiene 21. Quante erano le dozzine verdi e quante le rosse?[28]

Dal nostro punto di vista, l'aspetto più interessante di questo problema, che si riduce a un'equazione di secondo grado,[29] è il suo evidente artificio: non si vede infatti in quali circostanze realistiche un mercante potrebbe essere informato della somma e del *prodotto* di due quantità di merce, ma fosse costretto a ricavarsi con il calcolo le quantità stesse![30] In realtà la matematica *veramente* indispensabile ai mercanti non era

---

26 Simili elogi dell'utilità della matematica si trovano sia in altri autori rinascimentali, per es. in Baldi e in Luca Pacioli (cfr. Nenci 1998, pp. 36-7 e 335-6, nota 11), sia in autori di oggi (per es. Waerden 1975, p. 3).

27 L''abaco' come strumento meccanico di calcolo non solo non era l'oggetto fondamentale di questi trattati, ma in essi neanche se ne parlava; erano a tutti gli effetti libri di matematica elementare per mercanti. Il capostipite è il famoso *Liber abaci* (1202) di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, a cui si deve l'introduzione in Occidente delle cifre indoarabe.

28 Il testo originale (qui da me modernizzato) si trova, completo di soluzione, in Franci, Toti Rigatelli 1982, p. 60.

29 E come tale lo risolve il maestro Gori; tuttavia, dato che i numeri da trovare sono naturali, la soluzione si trova facilmente anche per tentativi, usando la tavola pitagorica che ci permette di fattorizzare numeri abbastanza piccoli (come qui 21); analogamente si potrebbe procedere per altri dei problemi del libro.

30 E' questa, peraltro, una delle difficoltà che nascono anche oggi quando si vogliono presentare problemi 'concreti' in cui entri la matematica elementare: molto spesso è difficile immaginare una situazione extra-scolastica in cui li si debba veramente risolvere. Meglio sarebbe, allora, ammettere apertamente la funzione *virtuosistica* del compito - e, complementarmente, difendere su altre basi l'insegnamento della matematica, come Platone si era provato di fare; soltanto, non sarebbe allora più possibile spendere, con un'apparenza di legittimità, una così gran parte dell'anno scolastico su questa o quella 'formula risolutiva'! (Cfr. nota 7).

tanta da commuovere chi, indifferente al suo valore intrinseco, avesse letto la perorazione di Commandino.[31]

(b) *Medicina*. Più interessante è il riferimento all'uso che della matematica si faceva in *medicina* - per calcolare le fasi della Luna: infatti - dice Commandino, che parlava con cognizione di causa, avendo conseguito a Ferrara il titolo di dottore in medicina - bisogna guardarsi dal cominciare una terapia 'pesante' quando la Luna è all'inizio del suo periodo di crescita (cioè quando da nuova - "combustione" - si avvia a trasformarsi in piena - "opposizione"). La teoria dei giorni critici era una parte importante della medicina ippocratica, era stata accettata da Galeno, e poi assunta nel sapere medico medievale. In particolare, fra le opere di Galeno sono compresi due trattati, *De diebus decretoriis* ("Sui giorni critici", in 3 libri) e *Prognostica de decubitu ex mathematica scientia* ("Prognosi della degenza per mezzo della scienza matematica"), nei quali si discute ampiamente dei rapporti fra la Luna (le sue fasi e le posizioni assunte rispetto allo zodiaco) e il decorso delle malattie; il secondo trattato, che era stato tradotto già nel XIII secolo, veniva attribuito, nel Medio Evo, allo stesso Ippocrate. (In un altro scritto Galeno riporta che, a detta di Ippocrate, geometria ed astronomia sono essenziali alla medicina).[32] Che ci fosse una relazione precisa fra le fasi lunari e la situazione degli umori corporei nell'uomo è del resto affermato come fuori dubbio anche da Keplero che, nel *De Fundamentis Astrologiae Certioribus* ("Su fondamenti più certi per l'astrologia") del 1602, scrive che "l'intera questione delle crisi dipende dal ritorno della Luna e dalle sue configurazioni con i pianeti, ed è vano cercare altrove spiegazioni", e dà al medico un consiglio generale affine a quello riferito da Commandino, e cioè di evitare trattamenti per un paziente molto debole "quando la Luna è in un Aspetto potente", perché "ogni Aspetto è di per sé una purga naturale".[33]

Il medico antico, medievale, e della prima età moderna, doveva dunque intendersi un po' di astronomia; il medico di oggi, invece, sembra poterne fare a meno. Ciò che mi pare più interessante in questo esempio è che contraddice un modo di argomentare molto comune in favore delle teorie: e cioè quello che fa leva sulla (supposta) indubbia solidità delle loro applicazioni, in contrapposizione al carattere più volatile dei pregi teorici in quanto tali. In effetti se le teorie, con il loro andirivieni, hanno infuso scetticismo in più di una persona riflessiva, anche le applicazioni possono essere oggetto di ragionevole controversia e vantare meriti altrettanto effimeri.[34] Comunque sia, la

31 Per quanto riguarda l'uso del sapere matematico come strumento di supremazia intellettuale, le autrici del libro da cui ho tratto le informazioni sopra riportate sulla matematica 'mercantile', riferiscono che dei due metodi allora correnti per la divisione, la "danda" - che è pressappoco il metodo utilizzato oggi - e, più difficile, la "galera", il secondo era spesso preferito perché "il sapere calcolare in questo ultimo modo veniva considerato segno di prestigio professionale" (Franci, Toti Rigatelli 1982, p. 47).

32 I trattati citati si trovano, rispettivamente, in Kühn 1821-33, vol. IX, pp. 769-941 e vol. XIX, pp. 529-73; del primo è rilevante soprattutto il libro III. Su Galeno vedi Thorndike 1923-58, vol. I, pp. 117-81 (soprattutto le pp. 178-9).

33 Per questo lato dell'attività di Keplero vedi Field 1984, che riporta anche una traduzione (pp. 229-68) in inglese dell'operetta citata; è da essa che abbiamo ricavato le frasi tra virgolette.

34 D'altra parte lo stesso Commandino, a quanto ci riferisce il Baldi, suo allievo e biografo, si rendeva conto che della medicina non ci si poteva fidare tanto: "Haveva egli infino allhora dato opera alla medicina, ma trovandola fra l'altre [scienze] fallacissima, e l'esperienza sua, come scrisse Hippocrate, pericolosa, per non aggirarsi l'animo in studio di cotanta incertezza, si dispose in tutto di lasciarlo" (Nenci 1998, p. 498).

matematica ha anche altri titoli da addurre in proprio favore - non ultimi gli esercizi del pensare chiaro e dell'autonomia intellettuale insiti nella sua pratica -,[35] e secondo me è su questi che si dovrebbe soprattutto porre l'accento quando se ne difende l'insegnamento e il supporto pubblico.[36]

6. Mondo delle idee e realtà fisica. Ma la difesa della matematica in nome delle sue applicazioni è soggetta a un'obiezione ulteriore: che garanzia *anticipata* ci può essere delle possibilità di successo, nell'interpretazione e nel controllo del mondo reale, di un sistema di teorie che riguardano oggetti immutabili e perfetti? Se descrivo una palla di gomma per mezzo di una sfera euclidea, come faccio a sapere che la descrizione non mi porterà fuori strada? Il Simplicio del *Dialogo sui massimi sistemi* [1632] obietterà precisamente questo: una palla materiale sicuramente non tocca il suolo in un *solo* punto, mentre questo è ciò che si assume circa il contatto di una sfera e un piano nella geometria di Euclide. Il portavoce di Galilei, Salviati, dà qui una memorabile risposta:

> Ma sapete, signor Simplicio, quel che accade? Sì come a voler che i calcoli tornino sopra i zuccheri, le sete e le lane, bisogna che il computista faccia le sue tare di casse, invoglie ed altre bagaglie, così, quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, *bisogna che difalchi gli impedimenti della materia*; che se ciò saprà fare, io vi assicuro che le cose si riscontreranno non meno aggiustatamente che i computi aritmetici. Gli errori dunque non consistono né nell'astratto né nel concreto, né nella geometria o nella fisica, *ma nel calcolatore, che non sa fare i conti giusti*.[37]

Come succede ogni volta che si legge (o si rilegge) Galilei ci si deve per così dire rimettere in sesto dopo l'impatto della dialettica sottile, le immagini vivide, le metafore persuasive che sa mettere in campo - prima di poter riuscire a valutare la forza effettiva dell'argomento. Qui la metafora degli involucri che bisogna scontare se si vuole pesare la merce contenuta suggerisce la possibilità di un'analoga scrematura nel caso della

---

[35] Vedine l'eloquente difesa in Godement 1966, pp. 16-7.

[36] La questione è stata presentata a mio avviso molto incisivamente da un matematico in una lettera a una rivista: "La ricerca matematica occupa le vite di una larga proporzione dei migliori pensatori del mondo, che avrebbero potuto fare altrimenti alcune cose molto utili. O i teoremi che essi scoprono hanno un valore intrinseco, confrontabile con le scoperte mediche, diciamo, o con le invenzioni nelle telecomunicazioni, oppure no. Se no, deve essere eticamente ingiustificato per i matematici spendere la loro vita a trovarli, e positivamente criminale corrompere i giovani attirandoli nella disciplina. Se i teoremi hanno valore in sé, sarebbe bene dirlo e smetterla di vendere il settore al pubblico su [...] basi predominantemente utilitarie" (Franklin 1991). Per determinare il valore della matematica sarebbero utili anche studi sul genere di vita e le caratteristiche morali (per esempio, il senso di responsabilità sociale) di chi la pratica, per verificare se le elevate aspettative di Platone al proposito abbiano una qualche corrispondenza con la realtà. Quanto alle conseguenze dell'attività matematica *sul corpo*, già Bernardino Ramazzini (1633-1714) aveva dato indicazioni interessanti e... preoccupanti (si noti che Ramazzini aveva conosciuto, fra gli altri, lo stesso Leibniz!): "I matematici, poi, per i quali è inevitabile che l'animo sia separato dai sensi e quasi dal rapporto con il corpo per considerare e dimostrare cose assai astruse e lontane dalla realtà materiale, sono quasi tutti intontiti, letargici e sempre estranei agli eventi umani. E' inevitabile pertanto che tutti gli organi e il corpo intero siano snervati come per una sorta di inazione e apatia, non diversamente che se fosse dannato alle tenebre eterne. Infatti mentre la mente è intenta a siffatti studi, la luce animale è interamente rinchiusa nel centro di essa e non si spande a illuminare l'esterno" (Ramazzini 1713, p. 264).

[37] Corsivi aggiunti.

realtà materiale: *bisogna* - il che comporta, evidentemente, che *si può* - eliminare dalle descrizioni concrete tutte quelle impurità che ostruiscono le vie d'accesso alla geometria, e si può star sicuri che ciò che rimarrà è l'*essenziale*. Ne *Il Saggiatore*, l'implacabile commento critico che nel 1623 Galilei aveva steso in margine al libro di padre Grassi sulle comete, era stata illustrata con un'altra metafora folgorante la visione del mondo che nove anni dopo avrebbe motivato la sicurezza di Salviati:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.[38]

E' questo un brano famosissimo, ma come spesso accade, la fama rende difficile apprezzare il valore di un testo.[39] Per capire quello che Galilei sta dicendo bisogna tornare indietro alla concezione del mondo che avevamo prima di imparare un po' di fisica matematica. Questo è alquanto difficile, poiché nozioni come quella di 'velocità di un corpo in un certo istante', che hanno richiesto, per il loro consolidamento, profonde indagini logico-matematiche (cfr. §§7-8), ci sono oggi familiari dall'esperienza quotidiana con i tachimetri delle autovetture; e la nostra vita è regolata da orologi di precisione, termometri, barometri, risultati di analisi mediche espressi con cifre decimali, e così via. Che la *quantità* sia la chiave dell'interpretazione di numerosi problemi di importanza pratica è oggi chiaro anche alle persone meno istruite in senso formale.

Resta però il fatto che la maggior parte delle nostre conoscenze sono di carattere *qualitativo*, e ci servono bene nelle necessità della vita di ogni giorno. Per esempio, nello sceverare fra sostanze commestibili e no, e anche nell'individuare fra l'innumerevole varietà di specie vegetali quelle contenenti principi curativi, il genere umano se l'è cavata benissimo non solo senza matematica, ma anche senza scienza (nel senso moderno del termine). Anche la "fisica del senso comune", che è una fisica qualitativa, serve in maniera sufficiente nelle situazioni ordinarie (cfr. nota 46 e §12). Inoltre la maggior parte delle decisioni importanti della vita (per esempio, la decisione di fidarci o di non fidarci di una persona) non passa attraverso la misura o il calcolo di alcunché. In generale, nelle questioni che nascono nell'interazione con i nostri simili i numeri hanno un ruolo secondario. Pascal, che era un grande matematico, aveva capito che c'è una differenza fra le due facoltà dell'intelletto umano che permettono rispettivamente di capire gli uomini e di capire la matematica, le aveva denominate *esprit de finesse* e *esprit de géométrie*, e ne aveva fatto un celebre paragone - che rendeva giustizia ad entrambe e non dava la vittoria a nessuna delle due -, circa trent'anni dopo che Galileo era stato umiliato dall'Inquisizione romana.[40] Quando l'ambasciatore Piero Guicciardini scriveva in una lettera del 5 dicembre 1615, ai tempi

---

[38] Galilei 1623, p. 38.

[39] Inoltre è bene ricordare che questo elogio della superiore penetrazione che il matematico ha del codice della natura si trova in un'opera dedicata alla difesa di una teoria fisica totalmente sbagliata: e cioè quella secondo cui le comete sono semplici fenomeni di riflessione della luce solare attraverso l'atmosfera! Il padre Grassi, almeno, aveva indovinato che si trattava di veri e propri corpi celesti.

[40] Chevalier 1954, pp. 1091-3.

del primo soggiorno romano di Galilei, che "questo non è paese da venire a disputare della luna, né da volere, nel secolo che corre, sostenere né portarci dottrine nuove",[41] egli dava prova, appunto, di *esprit de finesse*, e la sua valutazione - rivelatasi correttissima - non faceva ricorso a nessun tipo di modello matematico né a misurazioni di alcun genere. E bene avrebbe fatto Galilei a dare ascolto ai suoi consigli![42]

Con tutto ciò il successo della matematica nell'interpretazione dei fenomeni naturali è innegabile. Non c'è dubbio che la capacità di padroneggiare teoricamente anche fenomeni ordinari come la caduta dei gravi è aumentata con il progredire delle nozioni matematiche. Si consideri proprio la caduta dei gravi. Essa costituisce un problema appunto *molto più sottile* di quelli che si possono trattare per mezzo di concetti non matematici. Cercherò brevemente di spiegare perché, in quanto basterà questo esempio a mettere in chiaro che cosa voleva dire Galilei nelle due citazioni sopra riportate.

7. La matematizzazione della caduta dei gravi. La prima cosa che colpisce nell'osservazione non scientifica dei fenomeni naturali è che la maggior parte dei corpi, se privati di un sostegno, tende a raggiungere il suolo. La *seconda*, però, è che la maniera in cui questa caduta avviene differisce largamente da corpo a corpo. Un foglio di carta non cade come una penna. Una foglia di una quercia non cade come una ghianda dello stesso albero. Non solo, ma, anche per uno stesso oggetto, non è lo stesso cadere da un punto più alto o più basso: nel primo caso l'impatto con il suolo è, di solito, più violento (dico 'di solito' perché, evidentemente, per una foglia non c'è molta differenza).

Ora, la grande scoperta di Galileo è stata che, nonostante questa varietà manifesta del fenomeno, tutti i casi di caduta hanno un aspetto *quantitativo* che è identico. Ciò è tutt'altro che ovvio, ed infatti per scoprirlo, bisogna "difalc[are]" un *grosso* "impediment[o] della materia": bisogna immaginare che l'aria - l'elemento più ovviamente irrinunciabile nella nostra vita - *non ci sia*. Se l'aria non ci fosse, i corpi cadrebbero tutti ... no, *non* con la stessa velocità: infatti resterebbe vero che un vaso caduto da 3 metri rischierebbe di rompersi molto più facilmente che se fosse caduto da 30 centimetri - appunto perché urterebbe il suolo con una velocità molto maggiore. Se si potesse trascurare l'effetto della presenza dell'aria, tutti i corpi in caduta avrebbero uguale - nel tempo e l'uno rispetto all'altro - *la variazione, rispetto al tempo, della velocità* (cioè l'*accelerazione*). Ma la velocità è essa stessa una variazione rispetto al tempo: quindi per trovare ciò che nella diversità dei fenomeni di caduta rimane quantitativamente invariato dobbiamo, seguendo Galileo, prendere in considerazione *la variazione di una variazione*!

Questo passaggio è irto di difficoltà concettuali. Esso implica una concezione della velocità in cui questa sia attribuibile al corpo *istante per istante* e non solo *in media* lungo intervalli di tempo. Infatti se ci consideriamo in grado di calcolare la velocità media di un corpo su *qualsiasi* intervallo di tempo, ciò accade perché *in ogni istante* il corpo occupa *una posizione*; analogamente, l'accelerazione media si potrà calcolare su *qualsiasi* intervallo di tempo solo se potremo assegnare al corpo *in ogni istante una velocità*: questa velocità dovrà allora essere *istantanea*. Ma il concetto di velocità istantanea sembra una vera e propria contraddizione in termini: la velocità è, si direbbe 'per sua natura', una *media* (cioè il rapporto della distanza percorsa rispetto al tempo in

---

41 Cit. in Geymonat 1969, p. 109.

42 Un libro molto interessante, dedicato alla trama di conflitti interpersonali legati a questioni di rango e di etichetta nel caso Galilei, è Biagioli 1993.

cui è stata percorsa): e che cosa può mai significare, allora, '*la media rispetto a un solo istante*'?

La filosofia aveva già preso in esame questa problematica, memorabilmente, con i paradossi di Zenone, in particolare quello della *freccia*.[43] Se considerata in ogni dato istante, la freccia lanciata dall'arco è *immobile*: e allora come possiamo distinguere una freccia *veramente* immobile da quella che è in volo verso il suo bersaglio? Si noti che rispondere che possiamo decidere se la freccia si muove guardando dove sarà dopo un po' è insoddisfacente, perché lascia aperta la questione: che cosa distingue lo stato di una freccia che *dopo un po'* sarà in un altro luogo dallo stato di una freccia che sarà invece ancora nello stesso luogo?

Inoltre "il maestro di color che sanno", Aristotele, era stato molto chiaro circa la possibilità di concepire un "mutamento di mutamento"; in effetti egli *rigetta* tale possibilità nella *Fisica* (225b-226a). Ecco come enuncia la sua tesi:

> E neppure v'è movimento per ciò che agisce o patisce, né di tutto ciò che è mosso o muove, dal momento che non v'è movimento di movimento, né generazione di generazione, né in generale mutamento di mutamento.[44]

Il fatto che un pensatore della statura di Aristotele trovi quelli che per lui sono ottimi argomenti (esposti nelle pagine seguenti la citazione) per negare la coerenza logica del concetto di "mutamento di mutamento" dovrebbe essere sufficiente a mostrare la difficoltà del problema. E' plausibile che questo ostacolo possa aver 'bloccato' la fisica aristotelica, impedendole di anticipare le scoperte di Galilei e dei suoi contemporanei e successori.[45] Questa ipotesi non viene indebolita dalla circostanza che, nonostante tutto, Aristotele *sa* che la velocità di un corpo in caduta libera *aumenta*.[46]

Come si vede, la teorizzazione galileiana non riesce ad esplicarsi all'interno di concetti di uso comune e neanche della speculazione filosofica tradizionale: richiede l'intervento di nozioni *geometriche*. Il salto concettuale definitivo verrà compiuto con la scoperta del *calcolo infinitesimale*, il quale permette una formalizzazione coerente delle proprietà del moto attraverso la rappresentazione dello spazio e del tempo in termini del *continuo geometrico*. In effetti le difficoltà di pensare la velocità istantanea svaniscono in gran parte nella rappresentazione geometrica del moto, perché allora la velocità si rende *visibile* per mezzo della *tangente a una curva in un punto*. La risposta a Zenone richiede dunque l'*estensione dell'ontologia fisica* implicata da quest'uso della geometria: la

---

43 Vedi Aristotele, *Physica*, VI 9, 239b. Come si sa, Aristotele risolve questo paradosso zenoniano negando che il tempo sia composto di istanti indivisibili, e analogamente per ogni altra grandezza.

44 Ruggiu 1995, p. 251.

45 Vedi a tale proposito Bochner 1966, pp. 166-8.

46 Cfr. *De caelo*, I 8, 277a ("la terra [cioè l'elemento terra] si muove tanto più velocemente [*thâtton*] quanto più è vicina al centro [dell'Universo, che è poi quello della Terra] [...])". E' peraltro importante notare che il senso comune può affrontare un problema di difficile concettualizzazione nei suoi termini *aggirando l'ostacolo* e utilizzando, per esempio, disegni. A tale proposito meriterebbe di essere più largamente noto che, mentre i teorici cinquecenteschi della meccanica si dibattevano tra le ipotesi più bizzarre per descrivere la traiettoria dei proiettili, gli *illustratori* a cui erano affidate le copertine dei loro volumi *disegnavano* tranquillamente la risposta giusta, cioè una parabola! (Si veda il notevole capitolo VII [pp. 193-214] di Thuillier 1988 - derivato da un articolo su *La Recherche*, N. 191, settembre 1987 - , che presenta anche figure molto eloquenti, come l'immagine di copertina della *Nuova scienza* di Niccolò Tartaglia, apparsa in prima edizione nel 1537).

freccia (o qualsiasi altro proiettile) in movimento non può essere descritta come un *punto* dello spazio, ma come un *vettore tangente*.[47] Tuttavia questo passaggio, benché necessario, non è sufficiente: è vero che *se* il vettore tangente che descrive lo stato di moto della freccia in un certo istante *non è nullo*, allora la freccia si sta muovendo; ma non è vero che, se è nullo, allora la freccia *non* si sta muovendo; addirittura non basta che siano nulle anche la variazione della velocità, la variazione della variazione, e così via per ogni ordine. In effetti il paradosso della freccia scava in profondità nei fondamenti fisici del *determinismo*, e richiede, per una sua completa soluzione, o il ricorso a ipotesi dinamiche, o una severa limitazione del tipo di funzioni che possono rappresentare il moto di un corpo.

8. La rigorizzazione del calcolo infinitesimale. E' a questo punto necessaria una parola di cautela. Neanche il concetto di retta tangente (o di vettore tangente) si presta facilmente a una definizione logicamente soddisfacente. La spazializzazione del moto trasforma i problemi collegati ai concetti base della *cinematica* in quelli collegati ai concetti base della *geometria*. Così essi si rendono soggetti a un miglior controllo da parte della nostra intuizione, ma questo non basta a risolverli. In effetti è qui il dominio di quella che nel XVIII secolo fu detta la "metafisica del calcolo infinitesimale", e che il vescovo George Berkeley discusse polemicamente nel suo *The Analyst* [1734], in cui sosteneva - non senza buone ragioni - che i matematici dovevano convivere con difficoltà logiche non meno grandi di quelle che i liberi pensatori si compiacevano di associare ai misteri della fede cristiana. La secolare controversia sul canone di rigore nel calcolo infinitesimale è un tema affascinante che più volte è stata oggetto di ricostruzioni storiografiche. Chi si avvicinò maggiormente alle concezioni moderne fu Jean d'Alembert, del quale è istruttivo riportare la spiegazione della nozione di tangente a una curva - spiegazione sorprendentemente simile a quella che si può ancora oggi trovare in esposizioni 'popolari' dell'analisi:

> Immaginiamo ora che dei due punti A, B, che abbiamo supposto sulla curva, ce ne sia uno, per esempio B, che si avvicina continuamente all'altro punto A; e che per quest'altro punto A, che si suppone fisso, si sia tracciata una [linea] tangente alla curva; è facile vedere che la secante AB, tracciata per questi due punti A, B, di cui uno è supposto avvicinarsi sempre di più all'altro, si avvicinerà continuamente alla tangente, e infine diventerà la tangente stessa, quando i due punti si saranno confusi in uno solo.

Questa idea della tangente come ciò in cui si trasforma la secante a una curva quando i due punti *si confondono* lascia alquanto a desiderare; ma d'Alembert aggiunge:

> La tangente è dunque il *limite* delle secanti, il termine a cui esse si avvicinano sempre di più, *senza tuttavia mai arrivarci fin tanto che sono secanti*, ma a cui esse possono avvicinarsi tanto quanto si vorrà.[48]

---

47 In Meccanica Razionale si direbbe che lo stato di un corpo che si muove non è adeguatamente descritto da un punto dello "spazio delle configurazioni", bensì da un punto dello "spazio delle fasi". Si noti che l'intervento di qualità *potenziali* (cioè che esprimono *disposizioni a fare*, piuttosto che *fatti*) in fisica si ha già con il concetto di velocità istantanea, senza che si sia dovuta aspettare, circa due secoli dopo, la nascita della teoria dei campi elettrici e magnetici.

48 D'Alembert 1767, p. 343; corsivi aggiunti.

Nel complesso, si tratta di una spiegazione abbastanza chiara e non scorretta, anche se neppure ineccepibile.[49] E' chiaro però che molti problemi restano aperti, a cominciare da quello dell'*esistenza* del limite: quand'è che possiamo dirci sicuri che le secanti determinano, sia pure 'al limite', una tangente? D'Alembert fa affidamento sulla nostra intuizione geometrica, ma i fondamenti dell'analisi richiederanno altre messe a punto. La definizione oggi canonica di limite sarà data da Karl Weierstrass nella seconda metà dell'Ottocento, ed è caratterizzata dalla rinuncia alla metafora cinematica ('avvicinarsi', 'arrivare', ecc.). Questa definizione costituisce oggi uno dei punti di accesso alla matematica superiore, e risulta solitamente difficile da capire alla maggioranza degli studenti, secondo me - fra le altre ragioni - a causa dell'approccio astorico tipico di tanta parte dell'insegnamento. Ciò che qui bisogna sottolineare, però, è che *una gran parte dell'evoluzione dell'analisi matematica* è avvenuta anche in mancanza di una definizione rigorosa delle principali nozioni di base (a cominciare da quella di numero reale!).

9. Rigore e certezza in matematica. Spesso questa circostanza viene interpretata come se indicasse che ciò che viene considerato 'rigoroso' varia storicamente, e che quindi anche i nostri attuali assiomi e definizioni potrebbero un giorno essere impugnati come inadeguati (del resto, in un certo senso lo sono già stati, da parte delle scuole intuizionista e costruttivista, cfr. §4). Tuttavia ciò che mi sembra degno di considerazione è *quanta parte delle scoperte* ottenute con una certa concezione del rigore matematico *rimanga ancora valida* quando si fa strada una concezione nuova e, si presume, più esigente. Certo, per dare un esempio, non tutto ciò che era ritenuto valido nel XVIII secolo circa la somma di serie, o anche solo ciò che uno dei grandissimi della matematica, cioè Eulero - lo svizzero Leonhard Euler (1707-83) -, riteneva valido al riguardo, è sopravvissuto alla stagione del rigore tardo-ottocentesca. Molti teoremi sono stati 'salvati' quanto alle loro conclusioni solo modificando opportunamente le ipotesi: in altre parole, hanno dovuto essere *corretti*, di solito per mezzo di restrizioni imposte al loro campo di validità. Per esempio, Eulero scrive che la somma della serie

$$1-1+1-1+1-1+...$$

è 1/2, perché questa serie si ottiene sostituendo $x = -1$ nell'espansione in serie di potenze della funzione:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

e sostituendo $x = -1$ a primo membro si ottiene, appunto, 1/2. Eulero pensava che questo argomento fosse un'applicazione di un principio del tutto generale. Oggi tuttavia la serie suddetta si considera priva di somma (almeno in senso usuale), e il principio enunciato da Eulero invalido.[50] Bisogna aggiungere che già nel Settecento altri matematici (per es.

---

49 Per esempio, presa alla lettera rende impossibile identificare la tangente a una retta con la retta stessa.

50 Il ragionamento di Eulero sarebbe valido se la serie di potenze convergesse per $x = -1$, ma non è questo il caso.

Nicholas Bernoulli e d'Alembert) nutrirono serie perplessità al proposito.[51] Un contemporaneo di Eulero, Alexis Fontaine des Bertins (1705-71), a cui si devono contributi importanti alla teoria delle equazioni differenziali, rispose così a uno studente dubbioso circa i metodi del calcolo infinitesimale: "Ammettete gli infinitesimi come ipotesi, studiate il calcolo come lo si pratica, e sicuramente la fede vi verrà".[52] Raccomandazione simile in maniera un po' inquietante, e probabilmente allusiva, a quella che Pascal dava nella sua progettata apologia della religione cristiana a chi, essendosene allontanato, fosse desideroso di rientrarvi.[53]

In ogni caso, quello che sorprende è quanta parte del lavoro compiuto dai matematici settecenteschi, e da Eulero in particolare, sulle serie è rimasta valida, anche in quei casi in cui le dimostrazioni originali vengono oggi ritenute fondamentalmente errate.[54] Ciò è motivo di consolazione anche per il matematico di oggi: infatti, non si deve pensare che la situazione dell'analisi settecentesca non abbia paralleli con lo stato della ricerca matematica alla fine del Novecento. La matematica vive oggi come sempre di un delicato equilibrio fra la conquista di nuovi territori, che necessariamente comporta un certo numero di azioni avventate e di passi falsi, e lo stabilimento delle suddette conquiste, a cui deve lavorare pazientemente l'intera comunità matematica, a volte per decenni. Il lavoro di sistemazione e rigorizzazione, lungi dall'essere prova di un eccesso di scrupoli da parte dei matematici meno dotati, *è il necessario presupposto della trasmissione del sapere matematico alle nuove generazioni*, e l'unica garanzia che la matematica non diventi una pratica esoterica con i suoi grandi sacerdoti.[55]

La cumulatività della matematica, salvo eccezioni, è un fenomeno che non trova seri paralleli se non nella poesia e nell'arte: in altre parole, gli *Elementi* di Euclide sono tuttora in larga misura validi proprio come la poesia di Omero o la scultura di Prassitele.[56] Ciò che in sostanza permane, al di là delle enunciazioni sempre più precise (la cui importanza non va d'altronde sottovalutata) è l'*apprezzamento estetico* e il *giudizio di rilevanza* nei confronti di certe *forme* (per es. il triangolo) e di certe *formule*

---

51 Per i dibattiti settecenteschi sulla convergenza delle serie è molto attraente e ricco di informazioni il cap. 20 di Kline 1972, a cui rinvio per ulteriori dettagli sull'esempio da me discusso.

52 Questa frase, in forma un po' abbreviata ("Andate avanti, e la fede vi verrà"), è quasi sempre attribuita a d'Alembert (ma senza riferimento alla fonte della notizia). Che si tratti invece di Fontaine, il quale all'epoca godeva di notevole fama, è spiegato in Greenberg 1995, p. 629 (e nota 16, p. 753).

53 Chevalier 1954, pp. 1215-6. Il collegamento con Pascal, a quanto ne so, non è stato notato dagli storici della matematica. Si confronti quest'altra *pensée*: "L'abitudine è la nostra natura. Chi si abitua alla fede ci crede, e non può non temere l'inferno, e non crede ad altro. Chi si abitua a credere che il re è terribile, ecc. Chi dubita dunque che, essendo la nostra anima abituata a vedere *numero, spazio, movimento*, creda a questo e solo a questo?" (p. 1212, corsivo aggiunto).

54 A tale proposito è informativo ed equilibrato Grabiner 1974.

55 Su rigore matematico e dimostrazioni si è svolto negli ultimi anni un notevole dibattito a cui hanno partecipato molti eminenti matematici. Vedi Jaffe, Quinn 1993, e le risposte a questo articolo apparse sul N. 2 dell'anno 1994 sulla stessa rivista; per un riassunto della controversia e la ricca bibliografia si può consigliare Kleiner, Movshovitz-Hadar 1997.

56 Qualcuno potrebbe sostenere che la poesia di Omero sopravvive integralmente e non 'in larga misura', a differenza di Euclide. In realtà anche nel campo dei valori estetici non si può realisticamente ammettere una completa convergenza del giudizio dei competenti. E una tale convergenza non si ha neanche in matematica (per un esempio abbastanza recente ed impressionante vedi Lang 1995).

(per es. il teorema di Pitagora), che costituiscono un fondamentale filo conduttore attraverso l'intera storia della matematica.[57] Che queste forme e formule vivano di una vita propria, e che vengano studiate e comprese sempre meglio, piuttosto che 'inventate', nel corso dei secoli è una tesi - come ho già sostenuto in §4 - che non mi appare più problematica di quella che vede gli oggetti matematici come finzioni linguistiche o come convenzioni accettate dalla comunità disciplinare del momento; in più, si tratta di una tesi che permette quanto meno di tematizzare il fatto del successo della matematica nell'indagine della natura.

10. La fisica moderna è inconcepibile senza matematica. Da quanto precede spero che sia chiaro, comunque, che l'introduzione della matematica come codice del mondo fisico non è stata una faccenda indolore: essa ha richiesto la capacità di spogliare l'esperienza ordinaria di alcune caratteristiche apparentemente inevitabili (gli "impedimenti della materia" - cfr. §6), e di andare, per mezzo dell'analogia geometrica, al di là delle possibilità concettuali e rappresentative del linguaggio ordinario. Naturalmente se questo si può fare legittimamente senza commettere errori essenziali lo si deve alla circostanza fortunata che in molti fenomeni si può isolare un piccolo insieme di caratteri quantitativi, il quale si sviluppa autonomamente, cioè senza che caratteri al di fuori dell'insieme influiscano in maniera considerevole su di esso; gli altri caratteri intervengono solo, se intervengono, a un livello di approssimazione più elevato (a volte possono anche, successivamente, essere reintegrati). Che questa circostanza sia molto importante si capisce osservando che nella maggior parte dei casi noi siamo in grado di controllare solo un piccolissimo numero di fattori causali: se la moltitudine immensa di quelli che *dobbiamo* trascurare contasse di più, la scienza sarebbe impossibile.

Oggi la strada aperta da Galilei è quella principale della ricerca in fisica, ma anche in altre scienze, comprese, sia pure con alterni successi, quelle storiche e sociali.[58] La quantificazione domina ovunque, e la matematica non è più un lusso ma una necessità, non fosse altro che per il ruolo svolto dalla statistica un po' in tutte le indagini con ambizioni di 'scientificità'. Inoltre, dai primi passi del "calcolo sublime", come il calcolo infinitesimale venne chiamato nel Settecento, la matematica ha fatto moltissima strada, ed è un peccato che le normali persone colte non sappiano praticamente nulla di questi progressi.[59] E quando ne sanno qualcosa ciò accade - molto significativamente - per il tramite della divulgazione delle *teorie fisiche*. Così, per rimanere entro gli sviluppi ottocenteschi, ciò che si sa comunemente sulle geometrie non euclidee deriva, per lo più, da opere divulgative sulla teoria della relatività generale. Il fatto è che, soprattutto dopo l'avvento della *relatività generale* (1915) e della *meccanica quantistica* (1926), il genere di matematica che è diventato indispensabile in fisica è assai più avanzato di

---

57 Sul ruolo dei giudizi estetici nella ricerca matematica vale la pena consultare Hadamard 1949, cap. IX, e Huntley 1970.

58 E' il caso di notare che l'uso di formule matematiche nelle scienze sociali si presta facilmente a mistificare il lettore, dandogli l'impressione di un livello di rigore del tutto illusorio. Un esempio di ciò, che permetteva al suo autore, il politologo S. Huntington, di concludere nel 1968 che il Sud Africa dell'Apartheid era una "società a bassa frustrazione sistemica" (sic!), fu aspramente criticato dal matematico Serge Lang (per l'intera vicenda, e tutta la documentazione rilevante, è da vedere Lang 1998, pp. 1-222).

59 La scusa consueta per questo stato di cose - e cioè che la matematica è intrinsecamente incomunicabile ai non matematici - non può più essere fatta valere dopo l'apparizione di libri come Courant, Robbins 1945, Lang 1985, e Dieudonné 1987.

quello che serviva agli scopi della meccanica classica. Non sto suggerendo che la matematica della fisica classica, da Newton a Laplace, da Jacobi ad Arnol'd, sia invece facilmente accessibile al profano (o anche al matematico non specialista dell'argomento, se è per questo!). C'è però una differenza importante, ed è che la matematica sofisticata, nelle teorie più recenti, non serve solo come strumento per la risoluzione di problemi matematici nati in un contesto *relativamente* elementare (ciò che appunto accade per la meccanica classica), ma funge essa stessa da *scenario teorico*. In altre parole, già le idee fisiche *fondamentali* sono formulate in termini di concetti matematici altamente sofisticati.

E' ormai quasi obbligato, quando si parla di questo fatto, ricordare il titolo di un articolo di un fisico cui si devono, fra l'altro, importanti contributi matematici alla meccanica quantistica, Eugen Wigner, che parlava della "irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali" [1960]. L''irragionevolezza' stava nel fatto, appunto, che le teorie matematiche utilizzate in fisica teorica erano state create, nel precedente mezzo secolo, del tutto indipendentemente o addirittura *prima* del sorgere di una 'richiesta' da parte dei fisici - anche se poi, talvolta, i fisici le avevano in parte 'riscoperte'. Si trattava cioè di teorie matematiche nate per le esigenze 'interne' dello sviluppo della matematica pura. Eppure esse erano diventate essenziali per la stessa *formulazione* di teorie fisiche. Questa tendenza costituisce un aspetto essenziale anche della ricerca attuale in fisica e, bisogna dire, il contributo dei fisici teorici allo sviluppo di formalismi matematici avanzati è diventato sempre più notevole.[60] La matematizzazione nella scienza fisica contemporanea va quindi distinta dal mero predominio in essa del fattore quantitativo - che è un dato acquisito ormai fin dal XVII secolo. Se è vero che dobbiamo usare l'aritmetica quando andiamo al mercato, come ricordava Commandino (§5), possiamo però benissimo spiegare che cosa siamo andati a fare senza dover ricorrere all'aritmetica; ma se il fisico teorico vuole spiegare quali sono le attuali concezioni circa le particelle elementari, allora non può veramente fare a meno di introdurre molti più concetti matematici (anche se non necessariamente *formule* matematiche) di quanti un interlocutore non esperto sia in grado di ricostruire fondandosi su analogie non matematiche. Qui, come abbiamo accennato sopra (§3), l'idea della matematica come 'linguaggio' perde altro terreno: come mai, infatti, a differenza di altri 'linguaggi', la matematica può essere sì *scritta* in italiano, in inglese, tedesco ecc., ma non può essere *sostituita* con nessun altro linguaggio? Se potesse esserlo, anche molti scienziati - penso - sarebbero ben lieti di vederla 'tradotta' in un linguaggio più generalmente accessibile.[61]

11. Aspetti formali ed aspetti empirici delle teorie fisiche. La tendenza a individuare un ruolo molto limitato per la matematica nel sistema delle scienze deriva in parte dal fatto che il rapporto tra matematica e fisica è stato indebitamente semplificato in alcune influenti epistemologie. La scuola neopositivista, nata dal gruppo di intellettuali (filosofi

---

60 Può essere interessante ricordare che uno dei premi per la matematica più prestigiosi, la "Medaglia Fields", è stato conferito nel 1990 a un fisico teorico americano, Edward Witten, uno dei padri della teoria delle "supercorde".

61 Commentando l'aneddoto su Euclide e la "via regia" (vedi n. 5), il famoso fisico teorico Richard Feynman diceva, echeggiando il motivo galileiano del libro della natura: "E in effetti non c'è nessuna via regia: i fisici non possono tradurre in nessun'altra lingua. Se volete conoscere e apprezzare la natura è necessario capire la lingua che parla. Essa offre la sua informazione solo in una forma; noi non dobbiamo essere così superbi da pretendere che essa cambi prima di prestarle attenzione" (Feynman 1965, pp. 64-5).

e scienziati) del cosiddetto Circolo di Vienna, ha concepito la teoria fisica come una sorta di sovrapposizione fra un elemento empirico e uno formale; il primo è quello che qualifica la teoria come *fisica*, l'altro è un semplice sistema di convenzioni linguistiche e di equivalenze logiche. La matematica, insomma, aggiungerebbe ben poco al *contenuto* della teoria, anzi, in un certo senso, proprio *nulla*. Come si sa, per i neopositivisti, sulla scia del Wittgenstein del *Tractatus logico-philosophicus* (1921), la matematica è un'immensa tautologia - un attaccapanni su cui si appendono i vestiti delle verità di fatto, ma che, al contrario di questi, non può essere indossato. Le grandezze introdotte nella teoria e su cui la matematica interviene con i suoi algoritmi corrispondono a quantità misurabili, e tale corrispondenza è compendiata in regole esplicite. Mi affretto a dire che, come sempre accade quando si parla di un'intera scuola di pensiero - la quale, peraltro, si è differenziata in varie 'fasi' e 'correnti' - anche questa descrizione delle idee neopositivistiche sul rapporto fra teorie fisico-matematiche e realtà empirica non rende giustizia a tutte le posizioni individuali.[62] Tuttavia, leggendo i testi dei neopositivisti, e direi anche più in generale di vari epistemologi di estrazione neoempirista (compreso Karl Popper (1902-1994)), si ha spesso l'impressione che secondo costoro il contatto fra teoria e realtà sia, tutto sommato, non molto problematico, e che la matematica svolga poco più che servizi di economia concettuale e di calcolo. Consideriamo allora la domanda cruciale della metodologia delle scienze empiriche: *come si fa a vedere se una teoria è adeguata ai fatti*? Non c'è nessuna particolare difficoltà, secondo la concezione che stiamo descrivendo: si misurano alcuni dei parametri che descrivono il sistema che si vuole studiare, si introducono i valori trovati nella 'macchina formale' della teoria, e infine si confrontano i risultati ottenuti con i valori di altri parametri che pure si saranno andati a misurare: se il confronto dà eguaglianza entro i limiti dell'errore sperimentale, allora la teoria è confermata (o "corroborata", nella versione di Popper);[63] se no, è confutata (o "falsificata", per usare il *termine* preferito da Popper).[64]

In effetti la situazione è ben più complicata, e di ciò furono consapevoli due autori (ambedue fisici matematici) che il Circolo di Vienna, nel suo 'manifesto' del 1929, enumerò fra i propri padri spirituali: Henri Poincaré e Pierre Duhem. In particolare Duhem pubblicò nel 1906 un libro, *La teoria fisica*, che è uno dei pochi veri classici della filosofia della scienza, e che conserva tuttora una straordinaria vitalità. Duhem mise in evidenza molto efficacemente che quando si ha una teoria fisica (ma il discorso può essere esteso ad altri campi scientifici), la sua messa in opera ai fini della spiegazione e previsione per una certa classe di fenomeni richiede l'introduzione di 'ipotesi ausiliarie'. Quindi, quando una previsione fallisce, non è fallita la teoria *presa da sola*, ma il complesso costituito dalla teoria *e dalle ipotesi ausiliarie*; ne segue che - almeno da un punto di vista logico - si può sempre salvare la teoria scaricando la colpa su questa o quella delle sue compagne di sventura.

---

62 Vedi comunque per un esempio rappresentativo Carnap 1966, capp. 23-5, e la sintesi di Lambert, Brittan 1979, pp. 92-8.

63 Come si sa, per Popper è la nozione stessa di 'conferma' che non regge alle critiche, in quanto associata a un'idea di 'apprendimento dall'esperienza' (quella "induttivista") che Popper rifiuta; al suo posto egli introduce il concetto di "corroborazione" (cfr. Popper 1959, cap. X). Un bilancio abbastanza esatto di un dibattito che ha fatto scrivere migliaia di pagine è, secondo me, che nessuno ha mai saputo spiegare in che modo la 'corroborazione' popperiana riesca a sfuggire alle critiche sollevate contro la 'conferma' induttivista, senza per ciò stesso diventare inutilizzabile nella pratica scientifica.

64 Naturalmente 'falsificare' è inteso da Popper come l'opposto di 'verificare'.

Una conseguenza di queste considerazioni (che vennero espresse da Duhem con quella dovizia di riferimenti concreti alla storia della fisica che costituisce uno dei motivi di fascino della sua opera) è che la distinzione fra il 'contenuto empirico' di una teoria e il suo 'apparato formale' diventa sfocata. Infatti, come si fa a determinare che cosa implichi la teoria da un punto di vista empirico (e non 'meramente' formale) in ogni data situazione concreta? Non basta introdurre valori numerici nei canali di comunicazione fra teoria ed esperienza che sono istituiti dalle "regole di corrispondenza", perché *è la stessa pertinenza della teoria alla data situazione sperimentale* che è in questione! Per essere ancora più espliciti: che cosa dica la teoria a proposito dell'esito di un certo esperimento è un problema che chiama in causa *nozioni e ipotesi esterne alla teoria.* E queste interagiscono con l'apparato formale della teoria in più punti, e non solo alle 'estremità', cioè a livello delle grandezze matematiche interpretabili empiricamente per mezzo delle suddette regole. A mio parere tutto ciò costituisce una confutazione di un aspetto essenziale della epistemologia di stampo neoempirista - per giunta avanzata molto prima che quest'ultima prendesse il volo verso le accademie di mezzo mondo e sulle gazzette filosofiche!

12. L'interpretazione fisica di un fenomeno: un esempio. La questione del rapporto fra teoria fisica ed esperienza non è soltanto una specie di nicchia ecologica per epistemologi amanti di sottigliezze. Ciò che vorrei qui sottolineare è che essa ha una grande rilevanza anche ai livelli più 'bassi' dell'apprendimento (e dell'insegnamento) della fisica. Per spiegarmi meglio, penso che sia il caso di considerare in dettaglio un esempio elementare ma concreto.

Si consideri la seguente domanda con alcune possibili risposte:

> *Una palla lanciata verso il suolo rimbalza più volte. Perché ogni volta rimbalza sempre di meno e alla fine si arresta?*
> *Risposte:* (a) la forza agente si esaurisce; (b) in natura tutto tende a fermarsi; (c) effetto della pressione dell'aria sulla palla; (d) presenza di attriti vari; (e) effetto della maggior forza di gravità del suolo.

Questa è una domanda apparsa in un questionario somministrato alle matricole di Fisica e Scienze biologiche dell'Università di Roma "La Sapienza", nel 1987-88.[65] Delle risposte, fra cui gli studenti dovevano scegliere, una sola è stata ritenuta valida dai compilatori del questionario; è chiaro, tuttavia, che più d'una ha dalla sua una certa ragionevolezza. Per esempio la (b): non è forse vero che "in natura" (o almeno nei fenomeni naturali che possiamo osservare nella vita di ogni giorno) ogni movimento (e non solo quello di una palla che rimbalza!) tende ad arrestarsi? Basta a tale proposito pensare a tutto il denaro che si spende appunto *per non far fermare* autovetture, ventilatori, impianti di riscaldamento eccetera! Questa è del resto una delle tesi fondamentali dell'aristotelismo, secondo cui la velocità di un corpo è l'effetto di una forza che agisce su di esso, ed è a questa proporzionale. Con una formula si può esprimere questa "legge fondamentale della dinamica aristotelica":[66]

$$v = kF/R \quad \text{per } F>R\ (>0)$$

---

[65] Il testo completo del questionario si trova in appendice a Frova 1995.

[66] Come la chiama Dijksterhuis 1961, pp. 42-4; questo libro, che è un classico della storia della scienza, presenta un'esposizione molto lucida ed efficace della fisica aristotelica e dei suoi sviluppi medievali.

dove v è la velocità impartita a un corpo da una forza F che deve vincere una resistenza R (naturalmente se $F<R$ il corpo non si muove).[67] Ogni volta che la palla cade, la forza che le viene impressa dal suolo è inferiore: secondo il pensiero aristotelico, infatti, è la *dissipazione*, non la conservazione della forza che costituisce la regola e che quindi non richiede spiegazioni; il corpo deve pertanto avvicinarsi con i successivi rimbalzi sempre più al suo "luogo naturale" (cioè al centro della Terra). Il fenomeno sotto esame poteva quindi essere spiegato abbastanza bene da un fisico medievale, che avrebbe potuto optare per la (b) - intendendo con "natura" quella "sublunare".

Oppure si prenda in considerazione la (a). Se con 'esaurimento' della forza agente si intende che il movimento comunicato a un corpo da una forza si esaurisce quando la forza cessa di agire, e se con "forza agente" si intende quella che ha effettuato il lancio, allora la (a) è un caso particolare del principio che per mantenere *indefinitamente* in moto qualcosa bisogna agire continuamente su di esso, altrimenti l'impulso comunicato - pur non annullandosi immediatamente con il venir meno della forza - tenderà ad esaurirsi. (Qualcosa del genere fu sostenuto da quei riformatori dell'aristotelismo che introdussero la teoria dell'*impeto*, in particolare Giovanni Filopono, vissuto nel VI sec. d. C.). La risposta (a), così intesa, risulta quindi essere una variante della (b), e come tale riposa su un'evidenza analoga.

Comunque sia, la risposta 'giusta' è la (d): è la "presenza di attriti" che fa sì che la palla cessi di rimbalzare, altrimenti essa continuerebbe a farlo per sempre. Si noti che gli "attriti", in una situazione come quella descritta nella domanda, non sono qualcosa di eliminabile: essi ci sono *sempre*. L'idea è però che si possono concepire - in linea di principio! - situazioni in cui gli attriti sarebbero trascurabili (per un certo tempo), e allora in tal caso la palla continuerebbe a rimbalzare (per quel tempo). In effetti se sulla Terra (in condizioni ordinarie) tali situazioni possono solo essere approssimate più o meno bene, i moti astronomici costituiscono un esempio assai più aderente. Era proprio per questo che per Aristotele la fisica sublunare andava nettamente distinta da quella celeste. E fu solo trasformando le resistenze al moto, pur onnipresenti nella nostra esperienza, in *circostanze secondarie* che si poté effettuare quell'unificazione fra fisica terrestre e celeste che è il principale vanto della scienza moderna. La risposta 'giusta' è insomma *quella che inserisce il caso della palla che rimbalza in una generalizzazione che comprenda anche situazioni in cui si può fare astrazione da ogni attrito*. Che generalizzazioni di questo tipo siano importanti, pur nella loro distanza dall'esperienza ordinaria, è un fatto che si spiega non con l'intrinseca irrazionalità del punto di vista opposto, ma *con un complicato processo storico* di cui, come uomini venuti più di tre secoli dopo, dobbiamo essere consapevoli per apprezzarne sino in fondo i frutti. Da questo processo storico, è il caso di sottolineare, il senso comune non è uscito 'sconfitto', ma piuttosto 'integrato' da punti di vista più specifici che meglio si prestano a trattare situazioni (come quelle studiate in astronomia) sulle quali il senso comune non ha mai preteso una particolare autorità.[68]

---

67 Se la forza varia nel tempo e a un certo punto diventa inferiore alla "vis resistiva", il corpo si ferma.

68 C'è oggi una forte tendenza fra studiosi di diverse discipline, dalla fisica alla psicologia cognitiva, a sottovalutare l'apporto indispensabile del senso comune nella gestione, oltre che nella prima formazione, di tutto il sapere. A quest'ultimo proposito si consideri il ruolo che nella nascita della scienza moderna ebbe il sapere 'prescientifico' incorporato nella tecnologia che Galileo poteva ammirare nell'arsenale di Venezia (cfr. Galilei 1638, p. 49; vedi anche §6 e

Le considerazioni che precedono non vogliono, naturalmente, insinuare che sia giusto che studenti usciti dalla scuola media superiore ignorino i concetti fondamentali della fisica galileiana. Tuttavia io penso che se la fisica - come la matematica - continuerà ad essere insegnata come un insieme di verità indiscutibili, e nella forma, sopra criticata (§2, punto 3)), delle 'soluzioni senza problemi', ciò non potrà che respingere la maggioranza degli studenti; e anche in quelli che poi si sentiranno abbastanza motivati da iscriversi ad un corso di laurea scientifico l'insegnamento dogmatico non riuscirà a scalfire le convinzioni profonde, le quali, appena possono, riaffiorano. Così, scegliendo nel questionario le risposte lo studente riscopre (versioni ingenue di) Aristotele o Filopono, e dimentica di aver mai saputo alcunché circa la legge d'inerzia.

13. Le 'conseguenze empiriche' di una teoria fisica. Ma è ora il caso di spiegare *in che senso* la risposta (d) è una conseguenza della fisica moderna. Vedremo che la situazione è, da un punto di vista logico, tutt'altro che semplice.

Preliminarmente, però, per precisare quale sia il nostro compito attuale, è utile cercare di capire in *quale categoria* rientri il quesito nelle intenzioni di chi l'ha proposto. Esso è un *problema interno* a una teoria che i proponenti ritengono che sia più o meno nota a chi deve rispondere: la meccanica classica. Lo studente deve dimostrare di *saper interpretare un certo fenomeno in termini di quella teoria*. Non gli si chiede di proporre una propria teoria. Le alternative presentate servono solo per sviare gli studenti che non hanno abbastanza chiare le idee in materia di meccanica classica. Il fatto interessante è che *questa è la maniera tipica in cui il fisico* (e in generale lo scienziato) *professionista si rapporta ai fenomeni*: cioè egli assume ex officio che il fenomeno sotto i suoi occhi si possa *in qualche modo* interpretare in termini delle teorie che gli sono state insegnate, e il suo compito è solo di scoprire *in che modo*. (Se non ci riesce è colpa sua, non delle teorie).[69] Allo studente si vuole appunto insegnare *a comportarsi da fisico*. Il nostro proposito è, invece, diverso: vogliamo entrare nei dettagli del rapporto fra la fisica classica e il fenomeno investigato, e chiarire *fino a che punto e in che senso tale rapporto approssimi l'implicazione logica*.

1) La dinamica newtoniana, al contrario di quella aristotelica, assegna una causa *non* alle velocità o al loro mantenimento, ma alla loro *variazione*. Nella fisica classica il concetto centrale è quello di *accelerazione*, come abbiamo accennato (§7), e questa viene interpretata come effetto delle *forze* che agiscono sul corpo preso in esame. Quindi, per esempio, il fatto che dobbiamo spendere energia per mantenere in movimento una vettura, secondo la fisica classica, si spiega *solo* con la circostanza che ci vuole una forza per contrastare *altre forze* che agiscono sulla vettura e ne dissipano l'energia cinetica. Nello schema generale della fisica classica queste altre forze *devono* esserci, che si sia in grado di determinarle specificamente (cioè con le leggi della loro azione) o no. Invece, il fatto che la vettura si muova (purché di moto rettilineo uniforme) non richiederebbe, in sé, alcuna spiegazione.

---

la nota 46). Per un altro tipo di considerazioni al riguardo si veda l'"Introduzione" di Mamone Capria 1999.

69 Questo punto, e cioè il carattere di "rompicapo" ("puzzle") dei problemi affrontati dallo scienziato professionista, che viene messo alla prova da essi assai più di quanto essi mettano alla prova la teoria, è stato discusso da T. S. Kuhn (1922-96) nel suo famoso libro sulle rivoluzioni scientifiche (Kuhn 1970, cap. IV).

2) Veniamo al nostro problema. Supponiamo che la sola forza rilevante durante la caduta e nella risalita *dopo* il rimbalzo, sia la *gravitazione*, e che essa sia data dalla legge di Newton:

$$m\mathbf{a} = -\frac{kmM}{r^2}\mathrm{vers}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

Qui *m* è la massa della palla, **a** la sua accelerazione, *M* la massa della Terra, **r** il vettore posizione del centro di massa *A* della palla rispetto al centro di massa *T* della Terra, vers(**r**) è il versore di **r**, e *r* è il modulo di **r**, cioè la distanza da *A* a *T*. Ora, è lecito applicare questa formula?

2.1 La (1) è applicabile se un sistema di riferimento solidale con la Terra è un riferimento inerziale. Il concetto di "sistema di riferimento inerziale" è uno dei più controversi in tutta la storia della fisica classica. Una sua possibile definizione sbrigativa è che in esso valgono le leggi della dinamica newtoniana. Ma, dal punto di vista pratico, ciò non ci servirebbe a nulla se fossimo in dubbio circa la possibilità di applicare una certa legge. Con questa definizione sapremmo di aver scelto un riferimento inerziale solo se sapessimo che, fra le altre, anche la legge che intendiamo applicare è in esso valida: sicuramente ciò ci sarebbe di ben poco aiuto![70] Così i libri di meccanica classica (seguendo, in ciò, l'esempio di Newton stesso) cercano di indicare esplicitamente un sistema di riferimento inerziale, di solito in termini astronomici. Dal punto di vista del problema che stiamo esaminando, siamo autorizzati a considerare la Terra, per il lasso di tempo richiesto dall'esperimento e dato che la palla ha una massa molto più piccola di quella della Terra, come inerziale. Naturalmente, per *altri* esperimenti, la Terra sarebbe da considerare tutt'altro che inerziale. In altre parole, l'applicabilità, e entro quali limiti, della dinamica newtoniana è questione empirica, sulla quale l'apparato teorico in quanto tale non può dirci nulla.

2.2 E' vero, in secondo luogo, che la forza di gravitazione tra due corpi si può esprimere come se essi avessero tutta la massa concentrata nel loro centro di massa? Questo problema ha una risposta matematica ben precisa (ma che a Newton costò molta fatica, anche se oggi la si può trovare spiegata in quasi ogni libro di fisica di un primo anno di università), ed è affermativa, se si tratta di due sfere piene *omogenee*, altrimenti può essere negativa.[71] Ma forse noi sappiamo che la Terra è sferica? o che essa è omogenea? In realtà è da parecchio tempo che abbiamo buone ragioni per pensare che *nessuna di queste due cose è vera*.

2.3 Ma supponiamo di sapere che la Terra sia una sfera piena omogenea: potremmo considerare questa conoscenza come *parte della teoria fisica* che stiamo adoperando? Evidentemente no. La fisica newtoniana nulla ci dice, non dico della costituzione interna dei pianeti, ma neanche della loro esistenza! Per giunta, il dibattito sulla forma della Terra è stato uno dei più accesi nei primi due secoli della scienza moderna.[72] Anzi, la

---

70 Si potrebbe obiettare che basterebbe constatare la validità di *una* sola legge fisica, e precisamente della legge d'inerzia, per poter assumere valide anche tutte le altre. Ma la validità della legge d'inerzia è in un certo senso dipendente da quella di *tutte* le altre leggi.

71 Questo punto - del tutto classico - sembra però essere poco noto anche a livello universitario, a riprova dell'uso irriflesso che si fa delle 'approssimazioni' nell'insegnamento.

72 Vedi, per una parte importante di questo dibattito, Greenberg 1995.

più clamorosa delle conferme della teoria newtoniana si ebbe proprio quando fu misurato l'*appiattimento* al Polo Nord da essa previsto, con la celebre spedizione in Lapponia di Pierre Moreau de Maupertuis (1736). Dobbiamo dunque entrare nei dettagli della forma e della costituzione della Terra prima di poter risolvere il nostro problema? Quello che in pratica si fa è supporre che la deviazione della forma della Terra dalla sfericità, e della sua costituzione interna dall'omogeneità, non siano, in un contesto come quello che stiamo considerando, cospicue. Ma che cosa vuol dire, qui, 'in pratica'? Di quale 'pratica' si parla? Di quella richiesta per risolvere esercizi di fisica in modo da convergere con le soluzioni fornite dagli autori di libri di testo e compiacere alle commissioni d'esame?

2.4 Analoghi interrogativi si potrebbero porre circa l'ipotesi che l'unica forza che bisogna considerare durante la caduta o la risalita sia la gravitazione. Come lo sappiamo? Evidentemente, se la densità dell'atmosfera terrestre fosse maggiore non potremmo cavarcela così a buon mercato. E' forse la fisica newtoniana che ci dice che questa densità non è tale da alterare in maniera rilevante il risultato? E che cosa dire di eventuali altre forze? E' chiaro che, *nella logica dell'esercizio*, quando si scrive 'palla' e niente altro, bisogna intendere che essa è elettricamente neutra, che non è stata immersa nella pece prima di essere "lanciata", e così via. Ma, quando ci troviamo di fronte al fenomeno fisico in quanto tale, tutte queste sono assunzioni che in parte possono essere verificate direttamente, in parte *devono* essere fatte se si vuole sperare di cominciare ad usare le formule una buona volta: esse sono necessarie *in pratica*. Possiamo a questo punto rispondere alla domanda sul significato di questa locuzione. "In pratica" allude alla sola maniera in cui la teoria può essere applicata nelle situazioni concrete, e cioè *congiungendola* a una serie di ipotesi la cui validità è, in buona parte, *confermata a posteriori dal successo della loro cooperazione con la teoria principale*. Se invece tale cooperazione fallisce, ebbene, questo è ritenuto gettare ombra sulla validità di qualcuna di tali ipotesi, e solo *in ultima istanza* sulla teoria principale. Nel corso della sua polemica contro i matematici a cui abbiamo accennato, e contro chi pretendeva di giustificare i procedimenti del calcolo infinitesimale per mezzo dei risultati giusti a cui esso portava, Berkeley scrisse:

> In ogni altra scienza gli uomini dimostrano le loro conclusioni per mezzo dei loro principi, e non i loro principi per mezzo delle conclusioni. Ma se nella vostra doveste permettervi questo innaturale modo di procedere, la conseguenza sarebbe che dovreste adottare l'Induzione, e dire addio alla Dimostrazione. E se accettate questo, la vostra autorità non potrà più dare direttive in materia di Ragione e di Scienza.[73]

Anche se nella scienza empirica oggi ci si accontenta di molto meno che di una 'dimostrazione', quella criticata in questo passo è precisamente l'attitudine oggi accettata come scientifica e razionale. E' chiaro, però, che essa non ci dà certezze del tipo che una volta si pensavano associate all'idea stessa di scienza. Il punto è che oggi si pensa che *niente* possa darci quel tipo di certezze.

3) Assumiamo dunque che siano valide le condizioni sotto le quali è lecito applicare la formula (1). Allora è un *fatto matematico* che la seguente quantità si conserva durante il moto della palla:

---

[73] Berkeley 1734, p. 76.

$$E{:}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{kmM}{r}=costante$$

La funzione E si dice *energia meccanica totale* della palla. E’ facile calcolare la costante E: se R è il raggio della Terra e h_0 l'altezza del punto più alto raggiunto dalla palla, otteniamo

$$E=-\frac{kmM}{R+h_0}$$

Ne segue dunque che il modulo della velocità della palla è:

$$v=\sqrt{2kM(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R+h_0})}=\sqrt{\frac{2kM(h_0-h)}{(R+h)(R+h_0)}}.$$

Fin qui abbiamo esaminato il comportamento della palla *prima* e *dopo* l'urto: infatti la (1) non si può applicare all'istante dell'urto. La teoria sviluppata comporta che la palla non può *superare*, ammesso che rimbalzi più volte (come supposto) l'altezza iniziale (infatti, perché l'ultima formula abbia senso è necessario che sia $h \leq h_0$). E' ovvio che da questo non si può ricavare nulla sulle successive altezze raggiunte dalla palla *a meno che non si facciano ulteriori ipotesi sul sistema Terra-palla*.

Per esempio, si può supporre che la velocità v^+ (in modulo) dopo ogni rimbalzo sia proporzionale a v^-, la velocità *prima* del rimbalzo:

$$v^+ = \alpha v^-$$

dove il fattore di proporzionalità α è un numero reale compreso strettamente tra 0 e 1, e dipende solo dalla costituzione e dalla forma della Terra (solo sul luogo di contatto!) e della palla. Questo implica che ad ogni successivo rimbalzo la velocità diminuisce, e si può scegliere α in modo che α^n diventi estremamente piccolo per un valore basso di n (che rappresenta il numero di rimbalzi). Ma che cosa *sappiamo* di α? Questa domanda ci fa uscire dai confini della meccanica, cioè del contesto teorico in cui fin qui abbiamo analizzato il problema. Ciò che rende questo coefficiente *minore* di 1 sono appunto gli "attriti". Ma come vengono definiti gli attriti? Esattamente come quelle forze che dissipano l'energia meccanica del sistema - che, non fosse per loro, si conserverebbe. Nonostante la loro ubiquità, che appunto era stata riconosciuta nella fisica aristotelica con quello che dopo Galilei è giudicato un eccesso di enfasi, *nei libri di fisica odierni di attriti si parla poco*,[74] e si riconosce che le loro leggi sono poco note e che non hanno carattere 'fondamentale', cioè che devono in ultima analisi spiegarsi per mezzo di interazioni a livello microscopico. D'altra parte, nonostante lo stato appunto non proprio esaltante delle nostre conoscenze al riguardo,[75] la suddetta dissipazione è ritenuta essere non una 'perdita' pura e semplice, ma una conversione della *forma* di energia - per la

---

74 Per esempio, nel voluminoso compendio Yavorsky, Detlaf 1975 su 897 pagine di testo (esclusi indici e appendici) se ne dedicano agli attriti non più di 3 o 4.

75 Vedi per esempio Feynman *et al.* 1965, vol. I, parte I, §12-2, dove, fra l'altro, leggiamo: "E' molto difficile fare accurati esperimenti quantitativi sull'attrito, e le leggi dell'attrito non sono ancora state analizzate molto bene, malgrado l'enorme valore ingegneristico di un'analisi accurata".

precisione da energia meccanica a energia termica (o calore). La teoria delle forme d'energia e del loro diverso 'valore' è la *termodinamica*. Il suo primo principio è che l'energia totale di un sistema isolato si conserva. Ma stavolta l'energia non è solo l''energia meccanica', bensì l'energia *in tutte le sue forme*. Tuttavia c'è un *secondo* principio della termodinamica, che comporta che l'energia dissipata dagli attriti non può essere interamente recuperata come energia meccanica. In questo senso si può dire che, in presenza di attriti, deve essere necessariamente $\alpha < 1$. D'altra parte, in termini teorici, gli attriti sono *definiti* in modo che ciò accada (come abbiamo visto), e la meccanica newtoniana non si cura di spiegare perché mai ci debbano essere tali dispersioni di energia meccanica: essa *si limita a prendere atto - a posteriori - che tali dispersioni ci sono*. Ogni tentativo di andare al di là di questa semplice presa d'atto ci porta al di fuori della meccanica classica. Quanto alla termodinamica, il suo collegamento, e addirittura la sua *compatibilità*, con la meccanica sono stati occasione di accesi dibattiti già alla fine dell'Ottocento, e direi che ancora oggi lo stato della questione non si possa considerare del tutto soddisfacente.[76]

14. Conclusione. Abbiamo percorso un tragitto piuttosto lungo: è venuto il momento di tirare le somme, senza illuderci, naturalmente, di aver esaurito un argomento in cui siamo appena entrati (ma almeno ci siamo entrati davvero!).[77]

La matematica ha avuto da sempre un rapporto stretto sia con la filosofia che con la scienza della natura. Gran parte della filosofia platonica reca evidenza del fascino che sul suo autore esercitò questa disciplina. Ritornare a Platone può dare una prospettiva per l'apprendimento e la didattica della matematica a cui non bisognerebbe rinunciare, specialmente in quest'epoca in cui la 'multimedialità' si sposa a una dilagante rinuncia all'autonomia intellettuale. La matematica ha qualcosa del gioco e qualcosa della finzione narrativa, ma ha radici in attività ancora più basilari e vitali dell'uomo nel suo rapporto con il mondo della natura e i suoi simili. Le applicazioni 'utilitarie' della matematica sono state sempre vantate, ma non bisognerebbe dimenticare che esse possono essere almeno altrettanto fragili delle attrattive intrinseche della disciplina, e non andrebbero mai considerate come la 'vera' giustificazione per il suo studio. Quanto all'esercizio morale connesso alla sua pratica, e qualunque opinione si voglia sostenere circa il suo statuto ontologico, è importante notare che essa presenta una notevole resistenza ai tentativi di contraffazione. Inoltre, ben lungi dall'essere meramente 'il linguaggio della scienza', la matematica sta al cuore della concettualizzazione scientifica, soprattutto in fisica, e questo fin dal Seicento (almeno). Questa ammissione, naturalmente, non deve portarci all'eccesso di negare valore ad altre forme di conoscenza del mondo che sono non meno fondamentali. Ma chi - d'altra parte - volesse sminuire il ruolo della matematica mettendo in rilievo il particolare rapporto che la fisica ha con l'esperienza, deve tener conto che questo rapporto è molto problematico. La presunta grande vicinanza della fisica alla realtà empirica deve essere fortemente

---

76 Per esempio, in Ageno 1992 si argomenta convincentemente che per spiegare il secondo principio della termodinamica bisogna uscire drasticamente dai confini della meccanica classica (secondo questo autore bisogna far ricorso alla meccanica quantistica, e precisamente alla "indeterminazione tra energia e tempo" quale si rivela nei "fenomeni di assorbimento e di emissione della radiazione elettromagnetica da parte della materia" [p. 189]).

77 A differenza di quello che fanno altri autori, i quali pensano che la filosofia della matematica si riduca alla filosofia della logica. Colgo qui l'occasione per segnalare Davis, Hersh 1980, che può essere utile per un primo contatto con altre dimensioni del fenomeno matematica, oltre che per punti di vista diversi sulle tematiche che abbiamo affrontato.

ridimensionata. Abbiamo visto che la fisica classica non 'prevede' che una palla debba cessare di rimbalzare, e che la serie di ipotesi sulle forze che agiscono sul sistema Terra-palla, e sul tipo di semplificazioni che sono ammesse per trattare il problema, non 'fanno parte' della fisica classica in nessun senso deduttivo. Si tratta di assunzioni che risultano ragionevoli alla luce dei successi empirici ottenuti adottandole. Inoltre qualche versione di esse è semplicemente indispensabile per poter far entrare in campo la teoria e i formalismi matematici. Ma se una previsione formulata con l'aiuto della meccanica classica risultasse smentita, ciò non implicherebbe affatto la necessità di correggere la teoria. Dunque in che senso si può parlare del "contenuto empirico" di una teoria fisica? Dovrebbe essere chiaro, ormai, che tale nozione va presa con estrema cautela. Ciò non toglie che le teorie fisiche siano utili in pratica, in quanto ogni loro applicazione pratica si tradurrà in una previsione che potrà essere (questa sì) verificata o falsificata. Ma la teoria stessa è *una costruzione matematica che rappresenta una classe aperta ed infinita di possibilità empiriche*:[78] se rifiutiamo quindi alla matematica una sua dignità di scienza e la degradiamo a semplice gioco formale, anche la fisica, nella sua oggi preponderante ed imprescindibile dimensione matematica, diventa un artificio poco dissimile, tutto sommato, dalla magia. In questa prospettiva, al discorso galileiano sulla necessità di 'difalcare gli impedimenti della materia' per potervi leggere la trama matematica inscritta dal suo creatore, bisogna affiancare la tesi platonica che non sono tanto gli oggetti matematici a fornire un 'modello' per la realtà empirica, ma piuttosto il contrario: "bisogna servirsi del ricamo nel cielo come di modelli [*paradeigmasi*] per imparare quelle cose"[79] - cioè per facilitarsi la comprensione degli oggetti ideali studiati, nella loro forma più pura, dalla matematica.

Ringraziamenti. Questo è il testo, rielaborato ed ampliato, di una conferenza da me tenuta presso l'IRRSAE dell'Umbria il 24 marzo 1998 ("I linguaggi della scienza: matematica e fisica"), sotto gli auspici della Società Filosofica Italiana, sezione di Perugia. In esso ho fatto confluire anche una parte delle idee esposte nella "conferenza generale" tenuta il 29 ottobre 1997 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Perugia e intitolata "Alcune riflessioni sulla storia dei concetti di matematica e di fisica". Ringrazio il pubblico delle due conferenze, per la partecipazione attenta e vivace, e per alcuni spunti di riflessione che mi hanno indotto a estendere e precisare qua e là gli argomenti presentati; e gli amici Ermenegildo Caccese e Enzo Di Gennaro per qualche utile consiglio.

---

78 Cfr. Duhem 1914, parte I, cap. IV.

79 *Repubblica*, VII, 529d.

Bibliografia

AGENO M. 1992: *Le origini dell'irreversibilità*, Torino, Bollati Boringhieri.
d'ALEMBERT J. 1759-67: *Essai sur les éléments de philosophie*, Parigi, Fayard 1986.
BERKELEY G. 1734: *The Analyst*, in Luce, Jessop 1951, pp. 65-102.
BIAGIOLI M. 1993: *Galileo, Courtier. The Practice of Science in the Culture of Absolutism*, Chicago e Londra, University of Chicago Press.
BOCHNER S. 1966: *The role of mathematics in the rise of science*, Princeton U. P.
BORWEIN J. M. 1998: "Brouwer-Heyting Sequences Converge", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 20, N. 1, pp. 14-5.
CARNAP R. 1966: *The Philosophical Foundations of Physics. An Introduction to the Philosophy of Science*, a cura di M. Gardner, ediz. corretta (e avente la sola seconda parte del titolo): New York, Dover 1995.
CHEVALIER J. (a cura di) 1954: Pascal, *Oeuvres complètes*, Parigi, Gallimard.
COOLIDGE J. L. 1949: *The Mathematics of Great Amateurs*, New York, Dover 1949.
COURANT R., ROBBINS H. 1945: *Che cos'è la matematica* [1941], trad. dall'ingl., Torino, Boringhieri 1971.
DAVIS P. J., HERSH R. 1980: *The Mathematical Experience*, Harmondsworth, Penguin Books 1983.
DIDEROT D. 1754: *De l'interprétation de la nature*, in Vernière 1964, pp. 175-245.
DIEUDONNE' J. 1987: *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Parigi, Hachette.
DIJKSTERHUIS E. J. 1961: *Il meccanicismo e l'immagine del mondo* [1950], I ed. in olandese, trad. dall'ingl., Milano, Feltrinelli 1980.
DUHEM P. 1914: *La Théorie physique*, Parigi, Vrin 1989.
FEYNMAN R. P., LEIGHTON R. B., SANDS M. 1963: *The Feynman Lectures on Physics*, 3 voll., Amsterdam, Inter European Editions 1975 (ediz. con trad. ital. a fronte).
FEYNMAN R. P. 1965: *La legge fisica*, trad. dall'ingl., Torino, Boringhieri 1971.
FIELD J. V. 1984: "A Lutheran Astrologer: Johannes Kepler", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 31, pp. 189-272.
FRANCI R., TOTI RIGATELLI L. 1982: *Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento*, Urbino, QuattroVenti (Servizio editorale dell'Università di Siena).
FRANKLIN J. 1991: "Ethics of Mathematics", *The Mathematical Intelligencer,* vol. 13, N. 1, p. 4.
FROVA A. 1995: *Perché accade ciò che accade*, Milano, Rizzoli.
GALILEI G. 1623: *Il saggiatore*, Milano, Feltrinelli 1992.
GALILEI G. 1632: *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Torino, Einaudi 1970.
GALILEI G. 1638: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Torino, Boringhieri 1958.
GEYMONAT L. 1969: *Galileo Galilei* [1957], Torino, Einaudi.
GODEMENT R. 1966: *Cours d'Algèbre*, Parigi, Hermann.
GRABINER J. V. 1974: "Is Mathematical Truth Time-Dependent?", *American Mathematical Monthly*, pp. 354-65.
GREENBERG J. L. 1995: *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge, Cambridge University Press.
HADAMARD J. 1949: *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* [1945], New York, Dover 1954.

HEATH T. (a cura di) 1925: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 voll., New York, Dover.
HERSH R. 1998: *What is Mathematics, Really?*, Londra, Vintage.
HUNTLEY H. E. 1970: *The Divine Proportion. A Study in Mathematical Beauty*, New York, Dover.
JAFFE A., QUINN F. 1993: "'Theoretical mathematics': Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 29, pp. 1-13.
KLEINER I., MOVSHOVITZ-HADAR N. 1997: "Proof: A Many-Splendored Thing", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 19, N. 3, pp. 16-26.
KLINE M. 1972: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, Oxford University Press.
KLOTZ I. M. 1995: "Number Mysticism in Scientific Thinking", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 17, N. 1, pp. 43-51.
KÜHN C. G. 1821-33: *Claudii Galeni Opera Omnia*, 21 voll., Hildesheim, Olms 1965.
KUHN T. S. 1970: *La struttura delle rivoluzioni scientifiche* [1962], trad. dall'ingl., Torino, Einaudi 1978.
LAMBERT K., BRITTAN G. G. jr 1979: *Introduzione alla filosofia della scienza*, trad. dall'ingl., Torino, Boringhieri 1981.
LANG S. 1985: *La bellezza della matematica*, trad. dall'ingl., Torino, Bollati Boringhieri 1991.
LANG S. 1995: "Mordell's Review, Siegel's Letter to Mordell, Diophantine Geometry, and 20th Century Mathematics", *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 42, N. 3, pp. 339-50.
LANG S. 1998: *Challenges*, New York, Springer-Verlag.
LUCE A. A., JESSOP T. E. (a cura di) 1951: *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne*, Londra ecc., Nelson.
MAMONE CAPRIA M. 1998: "Scienza, realismo e pluralismo", *Bollettino della Società Filosofica Italiana*, N. 163, pp. 37-58.
MAMONE CAPRIA M. (a cura di) 1999: *La costruzione dell'immagine scientifica del mondo*, Napoli, La Città del Sole.
MICHELI G. 1980: "L'assimilazione della scienza greca", in *Storia d'Italia. Annali 3* (Torino, Einaudi), pp. 199-257.
NENCI E. (a cura di) 1998: Bernardino Baldi, *Le vite de' matematici*, Milano, FrancoAngeli.
POLYA G. 1957: *Come risolvere i problemi di matematica* [1945], trad. dall'ingl., Milano, Feltrinelli 1983.
POLYA G. 1962: *La scoperta matematica*, trad. dall'ingl., Milano, Feltrinelli 1979.
POLYA G. 1967: "L'enseignement par les problèmes", *L'Enseignement Mathématique*, 2ª serie, vol. 13, pp. 233-41.
POPPER K. R. 1959: *Logica della scoperta scientifica* [1934], trad. dall'ingl., Torino, Einaudi 1970.
POPPER K. R. 1972: *Objective Knowledge*, Londra, Routledge.
RAMAZZINI B. 1713: *Le malattie dei lavoratori*, I ed. 1700, trad. dal latino, Roma, Teknos 1995.
RUGGIU L. (a cura di) 1995: Aristotele, *Metafisica*, Rusconi.
SIZER W. S. 1991: "Mathematical Notions in Preliterate Societies", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 13, N. 4, pp. 53-60.
THORNDIKE L. 1923-58: *A History of Magic and Experimental Science*, 8 voll., New York, Columbia University Press.

THUILLIER P. 1988: *D'Archimède à Einstein*, Parigi, Fayard.
VERNIERE P. 1964 (a cura di): Diderot, *Oeuvres philosophiques*, Parigi, Garnier.
YAVORSKY B., DETLAF A. 1975: *Handbook of Physics*, trad. dal russo, Mosca, Mir.
WAERDEN B. L. van der 1975: *Science Awakening* [1954], vol. I, trad. dall'ingl., Dordrecht, Kluwer.
WAERDEN B. L. van der 1983: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlino ecc., Springer-Verlag.
WANG H. 1987: *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge (Mass.) e Londra, MIT Press 1991.
WIGNER E. 1960: "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, pp. 1-14