20 Aprile 2023 – VII Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

1. La gara consiste nella risoluzione in 120 minuti di quattro quesiti assegnati del valore di 10 punti ciascuno.
2. La soluzione di ciascun quesito richiede una dettagliata **argomentazione** o **dimostrazione**.
3. È consentito l'utilizzo di qualsiasi strumento (righello, compasso, software,…) ma è **assolutamente vietata, pena l'esclusione, la comunicazione con esterni alla squadra**.
4. Durante i primi 30 minuti è consentito porre domande alla commissione per chiarimenti sul testo della gara.
5. I componenti della squadra non possono lasciare l'aula di gara prima della consegna, che comunque non deve avvenire prima di 90 minuti dall'inizio.
6. La soluzione dei quesiti deve essere scritta in modo ordinato e leggibile esclusivamente sui fogli consegnati dal commissario. A pena di esclusione, l'elaborato NON dovrà contenere segni che lo rendano riconducibile alla squadra o alla scuola. Il nome del capitano e della scuola dovranno essere scritti nel foglio appositamente predisposto che verrà restituito in busta chiusa. Quest'ultima, insieme all'elaborato, sarà a sua volta inserita in una busta che verrà sigillata e consegnata al commissario.
7. Per quanto non indicato si fa riferimento al regolamento.

Per la contestualizzazione dei quesiti ci siamo a volte ispirati a fatti realmente accaduti della vita di Egnazio Danti, adattando comunque le situazioni alla peculiarità di quanto proposto. Quindi, ogni riferimento a fatti e persone è da ritenersi il frutto delle esigenze narrative del testo.

1. CRUCINUMERICO

Ignazio è un appassionato di enigmistica e tre amici hanno creato per lui il seguente cruciverba numerico. ***Provate a risolverlo giustificando adeguatamente i risultati ottenuti e sapendo che x e y sono multipli rispettivamente di 3 e* 7 .**

■	1		2	
3		■		■
	■	■	4	5
6			■	

ORIZZONTALI

1. Il 2023-esimo termine della progressione aritmetica che ha come primi quattro termini $p, 9, 3p - q,$ e $3p + q$

3. Il numero naturale tale che $(n + 1)! + (n + 2)! = 1088 \cdot n!$

4. y

6. Il prodotto $6m$ dove m è il numero di medaglie che vengono assegnate nel corso di un torneo della durata di 6 giorni, sapendo che, se m_k è il numero di medaglie ancora non assegnate all'inizio del giorno k, allora:

a) $m_1 = m$

b) $m_{k+1} = \frac{6}{7}\left(m_k - k\right)$ se $1 \le k \le 5$

c) $m_6 = 6$

VERTICALI

1. x

2. Il numero palindromo di tre cifre che, se aumentato di 32, è un palindromo di quattro cifre

3. La somma delle cifre di $N = 9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + \underbrace{99 \ldots 9}_{321\ cifre}$

5. il numero di valori interi n per i quali $800000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$ è un intero

1-O $3p - q$ e $3p + q$ sono due termini consecutivi, la loro differenza è $3p + q - 3p + q = 2q$.

$p + 2q = 9$ da cui si ottiene che $9 + 2q = 3p - q$ e quindi $q = 2$ e $p = 5$. La differenza tra due termini consecutivi è dunque 4, pertanto il 2023-esimo termine è $5 + 4 \cdot 2022 = 8093$.

3 -O L'equazione $(n + 1)! + (n + 2)! = 1088 \cdot n!$ Si può dividere per $n!$ e si ottiene $n + 1 + n^2 + 3n + 2 = 1088$ che è equivalente a $n^2 + 4n - 1085 = 0$. Le sue soluzioni sono $n_1 = 31$ e $n_2 = -35$ quindi il numero cercato è $n = 31$.

4 – O 91

6 -O Partendo da $m_1 = m$ si trova $m_2 = \frac{6}{7}(m - 1)$, $m_3 = \frac{6}{7}\left(m_2 - 2\right) = \frac{6}{7}\left(\frac{6}{7}(m-1) - 2\right) = \left(\frac{6}{7}\right)^2(m-1) - 2\left(\frac{6}{7}\right)$, $m_4 = \frac{6}{7}\left(m_3 - 3\right) = \left(\frac{6}{7}\right)^3(m-1) - 2\left(\frac{6}{7}\right)^2 - 3\frac{6}{7}$, iterando si trova $m_6 = 6 = \left(\frac{6}{7}\right)^5(m-1) - 2\left(\frac{6}{7}\right)^4 - \ldots - 5\frac{6}{7}$ da cui $m = \frac{6^5 + 2 \cdot 7 \cdot 6^4 + \ldots + 6 \cdot 7^5}{6^5}$ quindi $m = 36$ e $6m = 216$.

1 V- 81

2 -V Il numero palindromo n può assumere al massimo il valore 999, quindi il palindromo aumentato di 32 sarà minore di 1031. Il minimo valore di $n + 32$ è 1000. Vi è solo 1001 tra 1000 e 1031 che un numero palindromo quindi $n = 969$.

3 -V Esprimiamo i numeri della somma di N in potenze di 10, quindi $N = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots + (10^{321} - 1)$. Applicando la proprietà commutativa e associativa possiamo scrivere il numero nel seguente modo $N = (10 + 10^2 + \cdots + 10^{321}) - 321$. Il numero $(10 + 10^2 + \cdots + 10^{321})$ è uguale a $1111 \ldots .10$ ed è formato da 321 cifre uguali ad 1. Alle ultime quattro cifre è necessario sottrarre 321 quindi $1110 - 321 = 789$. La somma delle cifre del numero N sarà quindi $(321 - 3) + 7 + 8 + 9 = 342$

5 -V $800000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2^3 \cdot 2^5 \cdot 5^5 = 2^{8+n} \cdot 5^{5-n}$. Per essere un intero $n \geq -8$ e $n \leq 5$. I numeri interi compresi tra -8 e 5 estremi inclusi sono 14.

3. ENNUPLE MAGICHE

Nel 1562 Ignazio si trasferisce da Perugia al monastero domenicano di San Marco a Firenze e comincia ad insegnare matematica e scienze ai figli delle più potenti famiglie fiorentine. Viene presto notato dal Gran Duca di Toscana che lo invita a risolvere un problema da tempo nei suoi pensieri: ***esiste un poligono di n lati tale che la somma dei quadrati dei lati è uguale al quadrato del suo perimetro, la somma dei cubi dei lati è uguale al cubo del suo perimetro, e così via fino alla potenza n?*** Ignazio risponde immediatamente che tale poligono non esiste, ma aggiunge che, generalizzando il problema in $\mathbb{R}$, esiste invece più di una soluzione. In notazione moderna il problema diventa:

Trovare tutte le soluzioni reali $(\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n})$ ***del sistema:***

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = a} \\ \boldsymbol{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = a^2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_n^n = a^n} \end{cases} \quad \boldsymbol{con\ a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}}$$

Per ogni k con $1 \le k \le n$, sia $S_k = x_1^{\,k} + x_2^{\,k} + \ldots + x_n^{\,k}$ e σ_k il k-esimo polinomio simmetrico elementare in $x_1, \ldots, x_n$. Il sistema diventa:

$$\begin{cases} S_1 = a \\ S_2 = a^2 \\ \vdots \\ S_n = a^n \end{cases}$$

Sia P un polinomio con radici $x_{1, \dots,} x_n$

$$P(t) = t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$$

Dalle Formule di Viete si ha che $c_{n-i} = (-1)^i \sigma_i$

e dalle formule di Newton-Girard, per ogni k con $1 \le k \le n$, si ha

$$S_k + c_{n-1} S_{k-1} + \ldots + c_{n-k+1} S_1 + c_{n-k} k = 0$$

Sostituendo nell'ultima uguaglianza $c_{n-i} = (-1)^i \sigma_i$ si ottiene:

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} S_1 + (-1)^k \sigma_k k = 0.$$

Tenendo conto del sistema, per ogni k con $1 \le k \le n$, si ottiene

$$a^k - \sigma_1 a^{k-1} + \sigma_2 a^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} a + (-1)^k \sigma_k k = 0$$

Quindi:
se $k = 1$ si ha $a = \sigma_1$
se $k = 2$ si ha $a^2 - \sigma_1 a + 2\sigma_2 = 2\sigma_2 = 0$ da cui $\sigma_2 = 0$
se $k = 3$ si ha $a^3 - \sigma_1 a^2 + \sigma_2 a - 3\sigma_3 = 0$ da cui $\sigma_3 = 0$
iterando si ha $\sigma_k = 0$ per ogni k con $2 \le k \le n$.

Si ottiene infine $P(t) = t^n - a t^{n-1}$ che ha radici a e 0, da cui le soluzioni del sistema sono tutte e sole le n-uple che si ottengono dalla n-upla $(a, 0, \ldots, 0)$ mediante una permutazione.

4. DIVISIBILITÀ A FIRENZE

Durante il suo soggiorno a Firenze (1567), Ignazio Danti ricoprì la cattedra di matematica presso lo Studio Fiorentino, l'università intesa come Studium Generale a cui facevano riferimento numerosi studiosi e visitatori provenienti anche da fuori città. Un giorno uno studente gli chiese sotto quali condizioni il numero $3^n + 1 \; con \; n \in \mathbb{N}^+$non risultasse mai divisibile per $3^m - 1 \; con \; m \in \mathbb{N}^+$.

Egli rispose che se $m > n$ il quesito risultava banale perché $3^m - 1 > 3^n + 1 \; in \; \mathbb{N}^+$ e che se $m = 1$ allora $3^n + 1$, certamente pari $\forall n \in \mathbb{N}^+$, è sempre divisibile per $3^1 - 1 = 2$.

Dopo queste riflessioni dimostrò infine che

$\boldsymbol{3^n + 1}$ ***non è divisibile per*** $\boldsymbol{3^m - 1}$ ***se*** $\boldsymbol{1 < m \leq n \;\; con \;\; m, n \in \mathbb{N}^+}$**.**

Sapreste dimostrarlo anche voi?

Svolgimento. Supponiamo, per assurdo, che esistano n, m tali che $3^n + 1$ è divisibile per $3^m - 1$. Poniamo $n = hm + r$, $h > 0$, $0 \leq r < m$ e osserviamo che $3^m \equiv 1 \mod (3^m - 1)$. Quindi abbiamo che

$$3^n + 1 = (3^m)^q \, 3^r + 1 \equiv 3^r + 1 \mod (3^m - 1)$$

e quindi $3^m - 1$ divide $3^r + 1$, da cui ne ricaviamo che

$$3^m - 1 \leq 3^r + 1 \Rightarrow 3^m - 1 \leq 3^{m-1} + 1$$

poiché $r \leq m - 1$. Ma questo vuol dire

$$3^{m-1}(3 - 1) \leq 2 \Rightarrow 3^{m-1} \leq 1$$

e questa è una contraddizione dato che $m > 1$.

5. ANEMOSCOPIO GEOMETRICO

Ignazio costruì numerosi anemoscopi verticali a Firenze, Bologna e perfino a Perugia dove si trovò nell'estate del 1577 a un anno dalla morte del fratello Vincenzo. Non mancò nei suoi progetti un anemoscopio molto originale la cui sezione verticale è ottenuta dalla costruzione che segue.

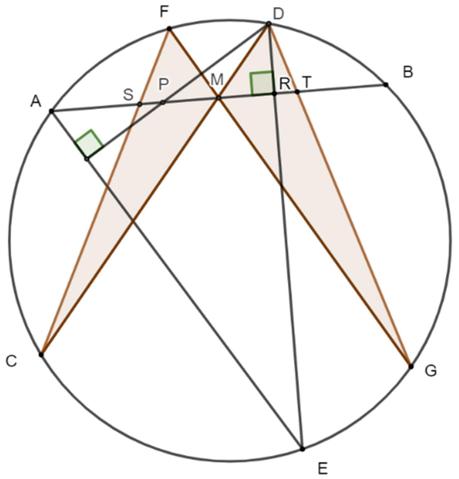
Si tracci una circonferenza γ e una sua corda AB. Sia R su AB tale che $AR = 2RB$, sia DE la corda passante per R perpendicolare ad AB, sia P l'ortocentro del triangolo ADE e sia M il punto medio di PR. Indicato con F un punto sull'arco AD non contenente B, si considerino le corde DC e FG passanti per M.

Si ottiene così il poligono intrecciato CDGF che costituisce il profilo dell'anemoscopio.

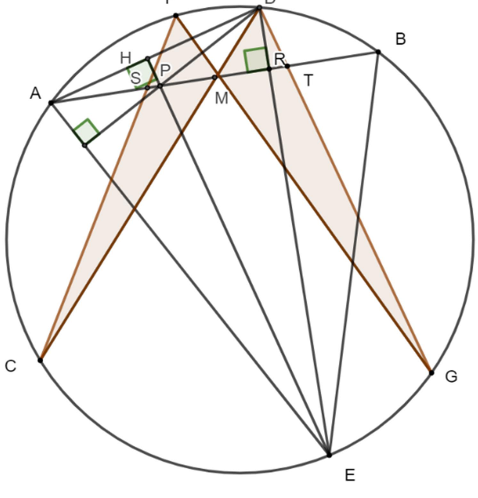
Chiamati $\{S\} = FC \cap AB$ e $\{T\} = DG \cap AB$, si dimostra che M è punto medio di ST e che è quindi possibile applicare nei punti S e T dei tiranti equidistanti da M utili al fissaggio dell'anemoscopio.

Come dimostrare che M è punto medio di ST?

<u>**Dimostrazione**</u>



Innanzitutto, P, essendo l'ortocentro di ADE, deve appartenere ad AR che è una delle altezze del triangolo. Usando il teorema della farfalla, per arrivare alla tesi è sufficiente dimostrare che M è il punto medio di AB oppure equivalentemente che $PA \cong RB$ (visto che $PM \cong MR$) oppure equivalentemente che P è punto medio di AR (visto che $RB \cong \frac{1}{2}AR$). Optiamo per quest'ultima dimostrazione.



Sia H la proiezione di E su AD, allora i triangoli APH e EPR sono simili perché hanno entrambi un angolo retto e $A\hat{P}H \cong E\hat{P}R$ perché opposti al vertice; in particolare risulta allora $H\hat{A}P \cong R\hat{E}P$. Inoltre $D\hat{E}B \cong D\hat{A}B$ (= $H\hat{A}P$) perché insistono sullo stesso arco DB. Per transitività si ha quindi che $R\hat{E}P \cong B\hat{E}D$, da cui ER è sia bisettrice che altezza del triangolo PEB ovvero il triangolo PEB è isoscele su base PB da cui ER è anche mediana di PB e $PR \cong RB = \frac{1}{2}AR$ ovvero P è punto medio di AR.